

2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

11 października 2008 r.

19. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}.$$

20. Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

21. Obliczyć $\text{NWD}(24!, 24^8)$.

22. Obliczyć $\text{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

23. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

24. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

25. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

27. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

28. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

29. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

30. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

31. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

32. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

33. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach.

Które spośród liczb mniejszych od 50 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone?

Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n :

Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby $\text{NWD}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n :

Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby $\text{NWW}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:

- a) $(\text{NWD}(m, n))^2 = \text{NWD}(m^2, n^2)$
- b) $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(\text{NWD}(a, b), c)$

34. Obliczyć

- a) $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$
- b) $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$
- c) $\text{NWD}(1000000008^{25}, 12^{16})$
- d) $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$
- e) $\text{NWD}(2000000004^{31}, 24^{24})$
- f) $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$
- g) $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$
- h) $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$
- i) $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$
- j) $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$
- k) $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13})$