

2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

11 października 2008 r.

19. Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$

$$n = 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f,$$

gdzie a, b, c, d, e, f są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Wówczas dana w zadaniu równość przyjmuje postać

$$2^{3a+4d} \cdot 3^{3b+4e} \cdot 5^{3c+4f} = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13},$$

co jest spełnione, o ile

$$3a + 4d = 11$$

$$3b + 4e = 9$$

$$3c + 4f = 13.$$

Nietrudno sprawdzić, że powyższe równości są prawdziwe dla

$$a = 1, \quad d = 2$$

$$b = 3, \quad e = 0$$

$$c = 3, \quad f = 1,$$

co daje

$$m = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 6750$$

$$n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20.$$

20. Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?*Rozwiązanie:*

Z równości

$$2^8 \cdot 18^{10} = 2^{18} \cdot 3^{20} = \mathbf{3} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$$

oraz

$$6^{19} = 2^{19} \cdot 3^{19} = \mathbf{2} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$$

otrzymujemy

$$2^8 \cdot 18^{10} > 6^{19}.$$

21. Obliczyć $\text{NWD}(24!, 24^8)$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę 24^8 :

$$24^8 = 2^{24} \cdot 3^8.$$

Jeśli chodzi o rozkład liczby $24!$, to interesują nas tylko wykładniki, z jakimi do tego rozkładu wchodzi czynniki pierwsze 2 i 3.

W iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 24$ występuje 12 liczb parzystych, 6 liczb podzielnych przez 4, 3 liczby podzielne przez 8 i jedna liczba podzielna przez 16. Zatem czynnik 2 pojawia się $12 + 6 + 3 + 1 = 22$ razy. Należy przy tym zwrócić uwagę, że liczby podzielne przez 4 są w tej sumie uwzględnione dwukrotnie: raz wśród 12 liczb parzystych i raz wśród 6 liczb podzielnych przez 4.

Podobnie, czynnik 3 wchodzi do rozkładu liczby $24!$ z wykładnikiem $8 + 2 = 10$.

Zatem

$$24! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot (\text{czynniki, które nas nie interesują}).$$

Stąd

$$\text{NWD}(24!, 24^8) = 2^{\min(22, 24)} \cdot 3^{\min(10, 8)} = 2^{22} \cdot 3^8.$$

22. Obliczyć $\text{NWW}(12^{12}, 18^{18})$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze:

$$12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$$

$$18^{18} = 2^{18} \cdot 3^{36},$$

co daje

$$\text{NWW}(12^{12}, 18^{18}) = 2^{\max(24, 18)} \cdot 3^{\max(12, 36)} = 2^{24} \cdot 3^{36}.$$

23. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

Odpowiedź:

$$\text{NWD}(a, b, c) = 2^{\min(4, 6, 10)} \cdot 3^{\min(7, 11, 3)} \cdot 5^{\min(9, 5, 0)} \cdot 7^{\min(0, 0, 2)} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2^4 \cdot 3^3$$

$$\text{NWW}(a, b, c) = 2^{\max(4, 6, 10)} \cdot 3^{\max(7, 11, 3)} \cdot 5^{\max(9, 5, 0)} \cdot 7^{\max(0, 0, 2)} = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^9 \cdot 7^2$$

24. Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.

Obliczyć $\text{NWD}(a, b, c)$ oraz $\text{NWW}(a, b, c)$.

Rozwiązanie:

Aby móc postąpić jak w poprzednim zadaniu, musimy najpierw zapisać rozkłady liczb a, b, c na czynniki pierwsze:

$$a = 2^{13} \cdot 3^{16}$$

$$b = 2^{16} \cdot 3^{11}$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

Dopiero teraz możemy podać NWD i NWW liczb a, b, c :

$$\text{NWD}(a, b, c) = 2^{\min(13, 16, 12)} \cdot 3^{\min(16, 11, 3)} \cdot 5^{\min(0, 0, 2)} = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 2^{10} \cdot 3^3$$

$$\text{NWW}(a, b, c) = 2^{\max(13, 16, 12)} \cdot 3^{\max(16, 11, 3)} \cdot 5^{\max(0, 0, 2)} = 2^{16} \cdot 3^{16} \cdot 5^2$$

25. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Wobec równości

$$n^2 - 1 = (n - 1) \cdot (n + 1)$$

oraz nierówności $n + 1 > 1$, podana liczba jest pierwsza tylko wtedy, gdy $n - 1 = 1$ oraz liczba $n + 1$ jest pierwsza.

Odpowiedź: $n = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania i wówczas $n^2 - 1 = 3$.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Dla $p = 2$ otrzymujemy liczbę pierwszą $3p + 1 = 7$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 2, to liczba $3p + 1$ jest parzysta i większa od 2, a więc jest złożona.

Odpowiedź: $p = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

27. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:

Dla $p = 3$ otrzymujemy liczbę pierwszą $p^2 + 2 = 11$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 3, to liczba p jest niepodzielna przez 3, skąd liczba p^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. W konsekwencji liczba $p^2 + 2$ jest podzielna przez 3, a ponieważ jest większa od 3, nie może być pierwsza.

Odpowiedź: $p = 3$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

28. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

Rozwiązanie:

Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m = 2^{2n} \cdot 3^n ,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m = 2n \\ m = n . \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma tylko jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych: $m = n = 0$, nie ma więc rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m, n spełniające podane równanie.

29. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

Rozwiązanie:

Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^{m+2n} \cdot 3^{m+n} = 2^k \cdot 3^{2k} ,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m + 2n = k \\ m + n = 2k . \end{cases}$$

Odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy

$$n = -k ,$$

co nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające podane równanie.

30. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

Rozwiązanie:

Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^{m+3n} \cdot 3^{2m+n} = 2^{2k} \cdot 3^k ,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m + 3n = 2k \\ 2m + n = k . \end{cases}$$

Odejmując stronami od potrojonego równania drugiego równanie pierwsze otrzymujemy

$$5m = k,$$

co po wstawieniu do drugiego równania daje

$$2m + n = 5m,$$

skąd

$$n = 3m.$$

Przyjmując $m = 1$ otrzymujemy $n = 3$ oraz $k = 5$. Jak łatwo sprawdzić, liczby te spełniają warunki zadania.

Odpowiedź:

Liczby naturalne m, n, k spełniające podane równanie istnieją, np. $(m, n, k) = (1, 3, 5)$.

31. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .

Rozwiązanie:

Dla $m = 1$, $n = 7$ iloczyn $mn = 7$ jest podzielny przez 7, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 1, 7 są liczby 1 oraz 7. Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1 i 7.

Liczba $d = 1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Z kolei liczba 7 jest pierwsza, a zatem jest ona dzielnikiem iloczynu wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników. Tak więc dla dowolnych liczb naturalnych m, n podzielność iloczynu mn przez 7 pociąga za sobą podzielność przez 7 co najmniej jednej z liczb m, n , skąd wynika, że $d = 7$ również spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1 i 7.

32. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

Rozwiązanie:

Dla $m = 4$, $n = 6$ iloczyn $mn = 24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 4, 6 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 6.

Z kolei dla $m = 3$, $n = 8$ iloczyn $mn = 24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 3, 8 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 8.

Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1, 2, 3 i 4.

Liczba $d = 1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, to jest podzielna przez 2, a ponieważ 2 jest liczbą pierwszą, co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez 2. Stąd $d = 2$ spełnia warunki zadania. W analogiczny sposób stwierdzamy, że warunki zadania są spełnione przez $d = 3$.

Dotychczasowe rozumowania w zasadzie nie różnią się od rozumowań wykorzystanych w poprzednim zadaniu. Jednak liczba $d = 4$ wymaga nieco innego podejścia.

Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, a więc w konsekwencji przez 8, to czynnik 2 wchodzi do rozkładu liczby mn na czynniki pierwsze z wykładnikiem równym co najmniej 3.

Jeżeli

$$m = 2^a \cdot (\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})$$

oraz

$$n = 2^b \cdot (\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych}),$$

to

$$mn = 2^{a+b} \cdot (\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych}),$$

a przy tym, jak ustaliliśmy, $a + b \geq 3$. Stąd $a \geq 2$ lub $b \geq 2$, a w konsekwencji odpowiednio m lub n jest podzielne przez 4.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1, 2, 3 i 4.

33. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach.

Które spośród liczb mniejszych od 50 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone?

Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n :

Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby $\text{NWD}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n :

Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby $\text{NWW}(m, n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:

a) $(\text{NWD}(m, n))^2 = \text{NWD}(m^2, n^2)$

b) $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(\text{NWD}(a, b), c)$

Rozwiązanie:

Na Bergamutach liczbami pierwszymi mniejszymi od 50 są: 4, 7, 10, 13, 19, 22, 25, 31, 34, 37, 43, 46, a złożone są $16 = 4 \cdot 4$, $28 = 4 \cdot 7$, $40 = 4 \cdot 10$ oraz $49 = 7 \cdot 7$.

Na Bergamutach nie zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, gdyż np. liczba 100 ma dwa istotnie różne rozkłady na czynniki pierwsze:

$$100 = 4 \cdot 25 = 10 \cdot 10.$$

Charakteryzacja wspólnych dzielników nie jest prawdziwa, np. liczby $m = 40$ i $n = 100$ mają wspólny dzielnik 4, który nie jest dzielnikiem liczby $\text{NWD}(40, 100) = 10$.

Ten sam przykład obala charakteryzację wspólnych wielokrotności, mamy bowiem $\text{NWW}(40, 100) = 400$, a liczba 1000 nie jest wielokrotnością liczby 400, pomimo iż jest wspólną wielokrotnością liczb 40 i 100.

a) Nie, np. dla $m = 4$, $n = 10$ mamy $\text{NWD}(4, 10) = 1$, ale $\text{NWD}(16, 100) = 4$.

b) Nie, np. dla $a = 40$, $b = 100$, $c = 4$ mamy $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(40, 100, 4) = 4$, ale $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(40, 100) = 10$ i $\text{NWD}(10, 4) = 1$.

34. Obliczyć

a) $\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$10^{43} = 2^{43} \cdot 5^{43}$$

interesują nas wykładniki dwójki i piątki w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby

$$254678914^{37}.$$

Korzystając z cech podzielności przez 5, 2 i 4, ustalamy, że liczba 254678914 nie jest podzielna przez 5, a ponadto jest podzielna przez 2, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 254678914^{37} czynnik 5 się nie pojawia, a czynnik 2 pojawia się w 37-mej potęgze.

Skoro $\min(37, 43) = 37$, otrzymujemy

$$\text{NWD}(254678914^{37}, 10^{43}) = 2^{37}.$$

b) $\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba 472851364 jest podzielna przez 4, czynnik 2 wchodzi do rozkładu liczby 472851364^{43} z wykładnikiem równym co najmniej 86.

Stąd

$$\text{NWD}(472851364^{43}, 2^{50}) = 2^{50}.$$

c) $\text{NWD}(1000000008^{25}, 12^{16})$

Rozwiązanie:

Skoro $12^{16} = 2^{32} \cdot 3^{16}$, interesuje nas występowanie czynników 2 i 3 w rozkładzie liczby

100000008^{25} . Ponieważ liczba 100000008 jest podzielna przez 4 i przez 9, dwójka i trójka występują w rozkładzie liczby 100000008^{25} w co najmniej 50-tych potęgach. To wystarczy, aby stwierdzić, że

$$\text{NWD}(100000008^{25}, 12^{16}) = 2^{32} \cdot 3^{16}.$$

Można też podać wynik w postaci 12^{16} , bo okazało się, że druga liczba jest dzielnikiem pierwszej.

d) $\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$

Rozwiązanie:

Wobec $300^{300} = 2^{600} \cdot 3^{300} \cdot 5^{600}$ interesują nas czynniki 2, 3, 5 w rozkładzie liczby

$$100000011^{44}.$$

Ponieważ liczba 100000011 jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 2, 5, 9, z interesujących nas czynników w liczbie 100000011^{44} pojawia się trójka w potęgę 44.

Zatem

$$\text{NWD}(100000011^{44}, 300^{300}) = 3^{44}.$$

e) $\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$

Rozwiązanie:

Wobec $24^{24} = 2^{72} \cdot 3^{24}$ interesują nas czynniki 2, 3 w rozkładzie liczby

$$200000004^{31}.$$

Ponieważ liczba 200000004 jest podzielna przez 3 i 4, ale nie jest podzielna przez 8, 9, z interesujących nas czynników w liczbie 200000004^{31} pojawia się dwójka w potęgę 62 oraz trójka w potęgę 31.

Stąd

$$\text{NWD}(200000004^{31}, 24^{24}) = 2^{62} \cdot 3^{24}.$$

f) $\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$

Rozwiązanie:

Skoro $10^{47} = 2^{47} \cdot 5^{47}$ interesują nas czynniki 2, 5 w rozkładzie liczby

$$18465210275^{44}.$$

Ponieważ liczba 18465210275 jest nieparzysta i podzielna przez 25, z interesujących nas czynników w liczbie 18465210275^{44} pojawia się piątka w potęgę co najmniej 88.

Zatem

$$\text{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47}) = 5^{47}.$$

g) $\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$

Rozwiązanie:

Mamy $14^{37} = 2^{37} \cdot 7^{37}$. Zatem interesują nas czynniki 2, 7 w rozkładzie liczby

$$7771428426328^{60}.$$

Ponieważ liczba 7771428426328 jest parzysta, w rozkładzie liczby 7771428426328^{60} pojawia się dwójka w potęgze co najmniej 60-tej.

Pozornie pojawia się problem cechy podzielności przez 7. Ale tylko pozornie, gdyż liczbę 7771428426328 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 7:

$$7'7'7'14'28'42'63'28.$$

Zatem liczba ta jest podzielna przez 7 i w rozkładzie liczby 7771428426328^{60} siódemka pojawia się z wykładnikiem co najmniej 60.

Stąd

$$\text{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37}) = 2^{37} \cdot 7^{37} = 14^{37}.$$

h) $\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$

Rozwiązanie:

Mamy $44^{37} = 2^{74} \cdot 11^{37}$. Zatem interesują nas czynniki 2, 11 w rozkładzie liczby

$$1122334455666^{50}.$$

Ponieważ liczba 1122334455666 jest parzysta i niepodzielna przez 4, w rozkładzie liczby 1122334455666^{50} pojawia się dwójka w potęgze 50-tej.

Wbrew pozorom, nie potrzebujemy cechy podzielności przez 11 gdyż liczbę 1122334455660 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 11:

$$11'22'33'44'55'66'0.$$

Liczba 1122334455666 jest większa o 6 od powyższej liczby podzielnej przez 11, zatem sama nie jest podzielna przez 11.

Stąd

$$\text{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37}) = 2^{50}.$$

i) $\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$

Rozwiązanie:

Wobec rozkładów

$$14^{17} = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$330^{23} = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23} \cdot 11^{23}$$

mamy

$$\text{NWD}(14^{17}, 330^{23}) = 2^{17}.$$

Ponieważ liczba 12468945716272^{29} jest podzielna przez 2^{17} , otrzymujemy

$$\text{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23}) = 2^{17}.$$

j) $\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

Rozwiązanie:

Z rozkładów

$$26^{19} = 2^{19} \cdot 13^{19}$$

$$39^{22} = 3^{22} \cdot 13^{22}$$

otrzymujemy

$$\text{NWD}(26^{19}, 39^{22}) = 13^{19}.$$

Ponieważ liczbę 1352263965789126 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 13:

$$13'52'26'39'65'78'91'26,$$

liczba ta jest podzielna przez 13, skąd

$$\text{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22}) = 13^{19}.$$

k) $\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13})$

Rozwiązanie:

Niech $n = 11223344$. Wówczas zadanie sprowadza się do obliczenia NWD liczb n^8 oraz $2^{13} \cdot n^{13}$. Ponieważ pierwsza z tych liczb jest dzielnikiem drugiej, otrzymujemy

$$\text{NWD}(11223344^8, 22446688^{13}) = 11223344^8.$$