

3. Wzory skróconego mnożenia, działania na wielomianach. Procenty. Elementy kombinatoryki: dwumian Newtona i trójkąt Pascala.

25 października 2008 r.

35. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}.$$

36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2+n} - n < \frac{1}{2}.$$

37. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $a^3 \dots b^3 = (a+b) \cdot \dots$

b) $a^3 \dots b^3 = (a-b) \cdot \dots$

c) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

d) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

38. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3+n^2} < n + \frac{112233}{336698}.$$

39. Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian

a) x^5+1 ,

b) x^5-1 ,

c) x^6+1 ,

d) x^6-1 ?

40. Skomentować fragment artykułu Anny Zawadzkiej, *Ile waży light?* (Gazeta Wyborcza, 24 sierpnia 2006 r.):

W Śmietankowym Warmii tłuszczu co prawda 73%, ale nie podano, czy na 100 g, czy na całą kostkę, czyli na 200 g. Z Łaciatym to samo. Napis głosi minimum 82% tłuszczu. Ale na ile? Nie podano. Masło Stołowe z Sokołowa Podlaskiego - 73,5% tłuszczu. Znów nie wiemy, czy na 100 g, czy na kostkę. Zwyczajowo na opakowaniach podaje się ilość tłuszczu na 100 gramów, ale konsument ma prawo tego nie wiedzieć.

41. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

- a) o 2000%
- b) o 1000%
- c) o 400%
- d) o 200%
- e) o 100%

42. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

- a) wzrośnie o 20%
- b) zmaleje o 20%
- c) wzrośnie o 50%
- d) zmaleje o 50%

43. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q , że liczba q jest od liczby p

- a) większa o 100%
- b) większa o 50%
- c) większa o 40%
- d) większa o 20%
- e) większa o 5%
- f) mniejsza o 5%

44. Liczba naturalna m jest o 25% większa od liczby naturalnej n . O ile procent największy wspólny dzielnik liczb m i n jest mniejszy od ich najmniejszej wspólnej wielokrotności?

45. Liczba naturalna m jest o 25% mniejsza od liczby naturalnej n . O ile procent najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m i n jest większa od ich największego wspólnego dzielnika?

46. Chcemy ulokować w banku pieniądze na 5 lat. Który z dwóch banków powinniśmy wybrać, oferujący 10% rocznie z coroczną kapitalizacją odsetek, czy oferujący 12% rocznie, ale z odsetki dopisywanymi po 5 latach, bez kapitalizacji w trakcie trwania okresu lokaty ?

47. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

48. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

49. Wskazać taką liczbę x , że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

50. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

51. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

52. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

53. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

54. Czy w trójkącie Pascala istnieją trzy liczby stojące w jednym wierszu na kolejnych miejscach i pozostające w proporcji 1:2:3 ?

55. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Okazało się, że żadne trzy z narysowanych cięciw nie mają wspólnego punktu leżącego wewnątrz koła ograniczonego danym okręgiem. Na ile obszarów zostało podzielone koło, jeżeli $n = 1, 2, 3, 4, 5$? Dla jakiej liczby n koło zostanie podzielone na 256 obszarów?

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>