

3. Wzory skróconego mnożenia, działania na wielomianach. Procenty. Elementy kombinatoryki: dwumian Newtona i trójkąt Pascala.

25 października 2008 r.

35. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}.$$

Rozwiązanie:

Usuwać niewymierność z mianownika otrzymujemy

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} = \frac{5-2\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6}) \cdot (5+2\sqrt{6})} + 2\sqrt{6} = \frac{5-2\sqrt{6}}{25-24} + 2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 5.$$

36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2+n} - n < \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I.

Po obustronnym dodaniu n otrzymujemy nierówność

$$\sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}.$$

Ponieważ obie strony powyższej nierówności są dodatnie, podnosząc obie strony do kwadratu, dostaniemy nierówność **równoważną**

$$n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4},$$

która jest oczywiście prawdziwa.

Sposób II.

Przekształćmy lewą stronę danej w zadaniu nierówności

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n} - n) \cdot (\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{2}.$$

37. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $a^3 \dots b^3 = (a+b) \cdot \dots$

b) $a^3 \dots b^3 = (a-b) \cdot \dots$

c) $a^4 \dots b^4 = (a+b) \cdot \dots$

d) $a^4 \dots b^4 = (a-b) \cdot \dots$

Odpowiedź:

- a) $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
- b) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
- c) $a^4 - b^4 = (a + b) \cdot (a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
- d) $a^4 - b^4 = (a - b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

38. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2} < n + \frac{112233}{336698}.$$

Rozwiązanie:

Ci wszyscy, którym niestraszny ułamek po prawej stronie, mogą podnieść nierówność stronami do sześciannu. Pozostali przenoszą n na lewą stronę otrzymując nierówność

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n < \frac{112233}{336698}.$$

Wówczas po skorzystaniu ze wzoru

$$a - b = \frac{(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n^3 + n^2} - n &= \frac{\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - n\right) \cdot \left((n^3 + n^2)^{2/3} + (n^3 + n^2)^{1/3} \cdot n + n^2\right)}{(n^3 + n^2)^{2/3} + (n^3 + n^2)^{1/3} \cdot n + n^2} = \\ &= \frac{n^2}{(n^3 + n^2)^{2/3} + (n^3 + n^2)^{1/3} \cdot n + n^2} < \frac{n^2}{(n^3)^{2/3} + (n^3)^{1/3} \cdot n + n^2} = \frac{1}{3} < \frac{112233}{336698}. \end{aligned}$$

Uwaga: Gdyby na początku było wiadomo, że liczbę po prawej stronie nierówności można oszacować przez $1/3$, można byłoby podnieść obie strony wyjściowej nierówności do sześciannu bez konieczności rachowania na ułamkach o wielocyfrowych licznikach i mianownikach.

39. Które z wielomianów $x^{30} - 1$, $x^{30} + 1$, $x^{60} - 1$, $x^{60} + 1$ są podzielne przez wielomian

- a) $x^5 + 1$,
- b) $x^5 - 1$,
- c) $x^6 + 1$,
- d) $x^6 - 1$?

Odpowiedź:

- a) $x^{30} - 1$ oraz $x^{60} - 1$,
- b) $x^{30} - 1$ oraz $x^{60} - 1$,
- c) $x^{30} + 1$ oraz $x^{60} - 1$,
- d) $x^{30} - 1$ oraz $x^{60} - 1$.

40. Skomentować fragment artykułu Anny Zawadzkiej, *Ile waży light?* (Gazeta Wyborcza, 24 sierpnia 2006 r.):

W Śmietankowym Warmii tłuszczu co prawda 73%, ale nie podano, czy na 100 g, czy na całą kostkę, czyli na 200 g. Z Łaciatym to samo. Napis głosi minimum 82% tłuszczu. Ale na ile? Nie podano. Masło Stołowe z Sokołowa Podlaskiego - 73,5% tłuszczu. Znów nie wiemy, czy na 100 g, czy na kostkę. Zwyczajowo na opakowaniach podaje się ilość tłuszczu na 100 gramów, ale konsument ma prawo tego nie wiedzieć.

Odpowiedź: Zawartość procentowa jest, z definicji, niezależna od wielkości porcji. Dziennikarz poważnej gazety nie ma prawa tego nie wiedzieć.

41. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

- a) o 2000%
- b) o 1000%
- c) o 400%
- d) o 200%
- e) o 100%

Odpowiedź:

- a) 10,50
- b) 5,50
- c) 2,50
- d) 1,50
- e) 1,00

42. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

- a) wzrośnie o 20%
- b) zmaleje o 20%
- c) wzrośnie o 50%
- d) zmaleje o 50%

Odpowiedź:

- a) 50 kg
- b) 75 kg
- c) 40 kg
- d) 120 kg

43. Czy istnieją takie liczby pierwsze p i q , że liczba q jest od liczby p
- a) większa o 100%
 - b) większa o 50%
 - c) większa o 40%
 - d) większa o 20%
 - e) większa o 5%
 - f) mniejsza o 5%

Odpowiedź:

- a) NIE.
- b) TAK, $p = 2$, $q = 3$.
- c) TAK, $p = 5$, $q = 7$.
- d) NIE.
- e) NIE.
- f) NIE.

44. Liczba naturalna m jest o 25% większa od liczby naturalnej n . O ile procent największy wspólny dzielnik liczb m i n jest mniejszy od ich najmniejszej wspólnej wielokrotności?

Rozwiązanie:

Z założenia

$$m = n + \frac{n}{4}.$$

Oznaczając $k = n/4$ otrzymujemy $n = 4k$ oraz $m = 5k$. W konsekwencji $\text{NWD}(m, n) = k$ oraz $\text{NWW}(m, n) = 20k$, skąd wynika, że największy wspólny dzielnik jest mniejszy od najmniejszej wspólnej wielokrotności 20-krotnie czyli o **95%**.

45. Liczba naturalna m jest o 25% mniejsza od liczby naturalnej n . O ile procent najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m i n jest większa od ich największego wspólnego dzielnika?

Rozwiązanie:

Z założenia

$$m = n - \frac{n}{4}.$$

Oznaczając $k = n/4$ otrzymujemy $n = 4k$ oraz $m = 3k$. W konsekwencji $\text{NWD}(m, n) = k$ oraz $\text{NWW}(m, n) = 12k$, skąd wynika, że najmniejsza wspólna wielokrotność jest większa od największego wspólnego dzielnika 12-krotnie czyli o **1100%**.

46. Chcemy ulokować w banku pieniądze na 5 lat. Który z dwóch banków powinniśmy wybrać, oferujący 10% rocznie z coroczną kapitalizacją odsetek, czy oferujący 12% rocznie, ale z odsetki dopisywanymi po 5 latach, bez kapitalizacji w trakcie trwania okresu lokaty ?

Rozwiązanie:

W drugim banku kwota K po 5 latach zamieni się na $1,6 \cdot K$. Natomiast w pierwszym banku po 5 latach będziemy mieli kwotę

$$\begin{aligned} K \cdot (1 + 0,1)^5 &= K \cdot \left(\binom{5}{0} \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot (0,1)^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot (0,1)^2 + \dots \right) > \\ &> K \cdot (1 + 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,01) = 1,6 \cdot K, \end{aligned}$$

a zatem pierwszy bank oferuje korzystniejsze oprocentowanie.

47. Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

Odpowiedź: Ponieważ $\binom{100}{k}$ rośnie wraz ze wzrostem k w zakresie $0 \leq k \leq 50$, otrzymujemy

$$\binom{100}{97} = \binom{100}{3} < \binom{100}{7} < \binom{100}{77} = \binom{100}{23} < \binom{100}{27} < \binom{100}{57} = \binom{100}{43} < \binom{100}{47},$$

48. Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

Rozwiązanie:

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3 \cdot \binom{n}{4} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{8} = \frac{(n^2-3n) \cdot (n^2-3n+2)}{8} = \\ &= \frac{\frac{n^2-3n}{2} \cdot \left(\frac{n^2-3n}{2} + 1\right)}{2} = \binom{\frac{n^2-3n}{2} + 1}{2}, \end{aligned}$$

zatem dane w zadaniu równanie jest spełnione dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 4$ oraz

$$k = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}.$$

49. Wskazać taką liczbę x , że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{n+2}{k+2} &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] + \left[\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \right] = \\ &= \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}, \end{aligned}$$

zatem dana w zadaniu równość jest prawdziwa przy $x = 2$.

50. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I.

Lewa strona równości jest równa

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot (b+c)!} \cdot \frac{(b+c)!}{b! \cdot c!} = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot b! \cdot c!}.$$

Analogiczny rachunek pokazuje, że prawa strona danej w zadaniu równości sprowadza się do tego samego wyrażenia.

Sposób II.

Na ile sposobów można podzielić $a+b+c$ uczniów na 3 grupy tak, aby w pierwszej grupie było a uczniów, w drugiej b uczniów, a w trzeciej c uczniów?

Otóż a uczniów do pierwszej grupy można wybrać na $\binom{a+b+c}{a}$ sposobów. Z pozostałych $b+c$ uczniów można wybrać b uczniów do drugiej grupy na $\binom{b+c}{b}$ sposobów, a pozostałych c uczniów utworzy grupę trzecią. Zatem istnieje $\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b}$ sposobów podziału uczniów na trzy grupy we wskazany sposób.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, przy wyborze najpierw b uczniów do drugiej grupy, a następnie a uczniów do pierwszej grupy, otrzymujemy wzór na liczbę możliwych sposobów podziału w postaci $\binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}$.

51. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Sposób I.

Rozwijając na sumę n -tą potęgę dwumianu $1+1$ otrzymujemy

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \quad (\spadesuit)$$

Sposób II.

Ile podzbiorów ma zbiór n -elementowy?

Z jednej strony, ma on 2^n podzbiorów.

Z drugiej strony ma on:

- $\binom{n}{0} = 1$ podzbiorów 0-elementowych (zbiór pusty)
- $\binom{n}{1} = n$ podzbiorów 1-elementowych
- $\binom{n}{2}$ podzbiorów 2-elementowych
-
- $\binom{n}{k}$ podzbiorów k -elementowych
-
- $\binom{n}{n} = 1$ podzbiorów n -elementowych (cały zbiór)

Zatem zbiór n -elementowy ma $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ podzbiorów, skąd

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

52. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

Rozwiązanie:

Rozwijając na sumę n -tą potęgę dwumianu $1-1$ otrzymujemy

$$0^n = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}. \quad (\heartsuit)$$

Dodając stronami równości $(\spadesuit)$ oraz $(\heartsuit)$ otrzymujemy

$$2^n = 2 \cdot \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots \right),$$

skąd

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots = 2^{n-1}.$$

53. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Rozwiązanie:

Rozwijając $2n$ -tą potęgę dwumianu $1+1$ otrzymujemy

$$4^n = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} > \binom{2n}{n}.$$

54. Czy w trójkącie Pascala istnieją trzy liczby stojące w jednym wierszu na kolejnych miejscach i pozostające w proporcji 1:2:3 ?

Rozwiązanie:

Założmy, że tymi liczbami są

$$\binom{n}{k-1}, \quad \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k+1}.$$

Wówczas

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}.$$

Skoro pierwsze dwie liczby mają pozostawać w proporcji 1:2, musi być

$$\frac{k}{n-k+1} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$2k = n - k + 1$$

$$3k = n + 1.$$

Podobnie

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Z proporcji 2:3 liczb drugiej i trzeciej wynika

$$\frac{n-k}{k+1} = \frac{3}{2},$$

skąd

$$2n - 2k = 3k + 3$$

$$2n = 5k + 3.$$

Z zależności $3k = n + 1$ otrzymujemy

$$2n = 6k - 2,$$

co daje

$$5k + 3 = 6k - 2.$$

Stąd otrzymujemy

$$k = 5, \quad n = 14.$$

Jedyna trójka liczb spełniających warunki zadania to

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003.$$

55. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Okazało się, że żadne trzy z narysowanych cięciw nie mają wspólnego punktu leżącego wewnątrz koła ograniczonego danym okręgiem. Na ile obszarów zostało podzielone koło, jeżeli $n = 1, 2, 3, 4, 5$? Dla jakiej liczby n koło zostanie podzielone na 256 obszarów?

Rozwiązanie:

Uważne zrobienie rysunku i policzenie obszarów pokazuje, że dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ liczby obszarów są równe odpowiednio 1, 2, 4, 8, 16.

Widzimy więc, że liczby obszarów są kolejnymi potęgami dwójki. Stąd wzór na liczbę obszarów ma postać 2^{n-1} . Zatem liczba 256 obszarów pojawi się dla $n = 9$.

Niestety, **powyższe rozwiązanie jest błędne!** Dla $n = 6$ liczba obszarów nie jest równa 32, ale 31. Przy $n = 7$ otrzymujemy 57 obszarów.

A oto poprawne rozwiązanie.

Zanim narysujemy jakąkolwiek cięciwę, okrąg ogranicza **jeden** obszar (koło). Jak zmienia się liczba obszarów po narysowaniu kolejnej cięciwy? Gdy zaczynamy rysować cięciwę, zaczynamy dzielić pewien obszar na dwa obszary. W momencie przecięcia z inną, wcześniej narysowaną cięciwą, zaczynamy dzielić inny obszar. Stąd wynika, że narysowanie cięciwy zwiększa liczbę obszarów o

$$1 + (\text{liczba przecięć z wcześniej narysowanymi cięciwami}).$$

Przez przecięcie cięciw rozumiemy punkt wspólny cięciw niebędący ich wspólnym końcem.

Zatem łączna liczba obszarów po narysowaniu wszystkich cięciw jest równa

$$1 + (\text{liczba cięciw}) + (\text{liczba przecięć cięciw}).$$

Ponieważ każda cięciwa jest wyznaczona przez dwa z wybranych n punktów, liczba cięciw jest równa $\binom{n}{2}$.

Z kolei każdy punkt przecięcia dwóch cięciw wyznacza 4 punkty - końce tych cięciw. Co więcej, każda czwórka punktów wyznacza dokładnie jedną parę przecinających się cięciw (zrób rysunek i zobacz, że 4 punkty wyznaczają 6 cięciw, ale tylko jedna para cięciw przecina się wewnątrz koła). To oznacza, że punktów przecięć cięciw jest tyle, ile czwórek zaznaczonych punktów, czyli $\binom{n}{4}$.

Zatem liczba obszarów, na jakie dzieli koło cięciwy, jest równa

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

Ten wzór wyjaśnia, dlaczego dla małych n liczba obszarów jest równa 2^{n-1} . Otóż dla małych n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

Po lewej stronie mamy sumę trzech wyrazów n -tego wiersza trójkąta Pascala, zaś po prawej mamy sumę co drugiego wyrazu, aż do końca wiersza. Jeśli n jest małe, n -ty wiersz trójkąta Pascala jest na tyle krótki, że suma po lewej stronie rozciąga się do końca wiersza. To wyjaśnia dlaczego wzór 2^{n-1} na liczbę obszarów początkowo jest prawdziwy, a potem się załamuje.

Wzór załamuje się dla $n = 6$, gdzie liczba obszarów jest równa

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4},$$

podczas gdy na podstawie zadania 52 wiemy, że

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 2^5.$$

Poprawna odpowiedź na ostatnie pytanie postawione w zadaniu brzmi:

256 obszarów pojawi się dla $n=10$.

Otóż dla $n = 10$ liczba obszarów jest równa

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4},$$

podczas gdy na podstawie zadania 52 wiemy, że

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = 2^9.$$

Jednak z uwagi na równość

$$\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = \\ & = \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + \binom{10}{0} = 2 \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} \right], \end{aligned}$$

co prowadzi do

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} = 2^8 = 256.$$

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>