

6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (c.d.).

20 grudnia 2008 r.

88. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

- a) $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$
- b) $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$
- c) $(0,(037))^{0,(3)}$

89. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

- a) $\sqrt{2}$
- b) $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m -tą potęgą liczby naturalnej
- c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$
- d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$
- e) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$
- f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m, n > 1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

90. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

OSZUSTWO 91.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

ROZWIĄZANIE I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

ROZWIĄZANIE II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2} \\ w + \sqrt{2} &= \sqrt{3 - \sqrt{8}} \\ w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 &= 3 - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w + 1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

OSZUSTWO 92.

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna.

ROZWIĄZANIE:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w . Wtedy

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2} \\w-\sqrt{2} &= \sqrt{3-\sqrt{8}} \\w^2-2\sqrt{2}w+2 &= 3-2\sqrt{2} \\2\sqrt{2}(-w+1)+(w-1)(w+1) &= 0\end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w-1$ otrzymujemy

$$-2\sqrt{2}+w+1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

W powyższym rozwiązaniu wykonujemy dzielenie przez $w-1$, co jest dozwolone pod warunkiem, że $w-1$ jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna lub równa 1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\sqrt{3-\sqrt{8}} &= -\sqrt{2}+1 \\3-\sqrt{8} &= (-\sqrt{2}+1)^2 \\3-\sqrt{8} &= 2-2\sqrt{2}+1 \\3-\sqrt{8} &= 3-\sqrt{8},\end{aligned}$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa 1, czyli jest liczbą wymierną.

Jak to jednak możliwe, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1,$$

skoro po lewej stronie występuje liczba większa od $\sqrt{2}$, a więc tym bardziej większa od 1?

93. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

94. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

- 95.** Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- 96.** Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?
- 97.** Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c są wymierne?
- 98.** Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?
- 99.** Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d są wymierne?
- 100.** Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+e$, $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a , b , c , d , e są wymierne?
- 101.** Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.
- 102.** Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?
- 103.** To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.
- 104.** Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach.
- Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że
- a) $0 < x < 1$ oraz liczba x jest niewymierna,
 - b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
 - c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
 - d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
 - e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
 - f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
 - g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,
 - h) $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
 - i) $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
 - j) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
 - k) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,

- l)** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
- m)** $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
- n)** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
- o)** $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
- p)** $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- q)** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
- r)** $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
- s)** $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
- t)** $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>