

7. Szkicowanie wykresów prostych funkcji. Podstawowe własności funkcji: różnowartościowość, monotoniczność, okresowość, parzystość, nieparzystość. Wyznaczanie zbioru wartości prostych funkcji na podanym przedziale.

10 stycznia 2009 r.

105. Funkcja jest

- a) okresowa
- b) parzysta
- c) nieparzysta

wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest niezmienniczy ze względu na

Odpowiedź:

- a) pewną translację (przesunięcie) o wektor równoległy do osi OX
- b) symetrię osiową względem osi OY
- c) symetrię środkową względem początku układu współrzędnych

106. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta? Monotoniczna?

- a) $f(x) = 0$
- b) $f(x) = 37$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = 2x^2 + 1$
- e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
- f) $f(x) = 14x^6 + 6x^4$
- g) $f(x) = x^6 + x^5$

Odpowiedź:

- a) parzysta, nieparzysta, niemalejąca, nierosnąca
- b) parzysta, niemalejąca, nierosnąca
- c) nieparzysta, rosnąca
- d) parzysta, nie jest monotoniczna
- e) nieparzysta, rosnąca
- f) parzysta, nie jest monotoniczna
- g) nie jest parzysta ani nieparzysta, nie jest monotoniczna

107. Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|,$$

gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej. Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

a) $f_1(x) = f(2x)$

b) $f_2(x) = f(x/2)$

c) $f_3(x) = 2f(x)$

d) $f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$

e) $f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

f) $f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$

g) $f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$

h) $f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$

i) $f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$

j) $f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$

k) $f_{11}(x) = f(x) + x$

l) $f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$

108. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$

d) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

f) $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$

g) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|-2}$

h) $f(x) = 1 - \frac{1}{|x-2|}$

i) $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x-2}\right|$

$$\text{j)} f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x| - 2} \right|$$

$$\text{k)} f(x) = \left| 1 - \frac{1}{|x - 2|} \right|$$

109. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3 - x) = f(x), \quad f(6 - x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

Rozwiązanie:

Warunek

$$f(3 - x) = f(x)$$

jest równoważny temu, że wykres funkcji f jest osiowosymetryczny względem prostej o równaniu $x = 3/2$.

Podobnie, warunek

$$f(6 - x) = f(x)$$

jest równoważny temu, że wykres funkcji f jest osiowosymetryczny względem prostej o równaniu $x = 3$.

Wykres funkcji f jest zatem niezmienniczy ze względu na złożenie tych symetrii, które, przy zachowaniu odpowiedniej kolejności, jest przesunięciem o wektor $(3, 0)$. Zatem funkcja f jest funkcją okresową o okresie 3.

Stąd natychmiast otrzymujemy

$$f(-x) = f(3 - x) = f(x),$$

skąd wynika, że funkcja f jest parzysta.

Uwaga: Okresowość funkcji f można uzyskać także bez rozważań geometrycznych, zauważając, że

$$f(3 - x) = f(6 - x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

110. Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

$$f_1(x) = 37 + x$$

$$f_2(x) = 37 - x$$

$$f_3(x) = x - 37$$

$$f_4(x) = 3x - 2$$

$$f_5(x) = 3x - 4$$

$$f_6(x) = 3x - 6$$

$$f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$$

$$f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$

$$f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$$

$$f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$$

Odpowiedź: Podany w treści zadania warunek oznacza, że funkcje f_i oraz f_j są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, czyli ich wykresy są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$. Należy więc naszkicować wykresy wszystkich podanych funkcji, a następnie połączyć je w pary wykresów symetrycznych.

Parami (i, j) numerów funkcji wzajemnie odwrotnych są $(1, 3)$, $(4, 8)$, $(5, 9)$, $(6, 7)$ oraz $(12, 13)$.

Pozostałe trzy funkcje f_2 , f_{10} , f_{11} są odwrotne same do siebie.

111. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2$ na przedziale

- a) $[1, 4)$
- b) $[-2, -1)$
- c) $(-3, 2)$

Odpowiedź:

- a) $[1, 16)$
- b) $(1, 4]$
- c) $[0, 9)$

112. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = |2^x - 8|$ na przedziale

- a) $(0, 1)$
- b) $(2, 4]$
- c) $\left(-\infty, 3\frac{1}{2}\right]$

Odpowiedź: Należy naszkicować wykres funkcji, a następnie przy jego pomocy udzielić odpowiedzi.

- a) $(6, 7)$
- b) $[0, 8]$
- c) $[0, 8)$

113. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^4 - 50x^2$ na przedziale

- a) $(-10, -6)$
- b) $(-7, -1)$
- c) $(-6, 1)$
- d) $(-1, 7)$
- e) $(3, 10)$

Odpowiedź: Należy naszkicować wykres funkcji, a następnie przy jego pomocy udzielić odpowiedzi. W tym celu zauważamy, że

$$f(x) = x^4 - 50x^2 + 625 - 625 = (x^2 - 25)^2 - 625.$$

- a) $(-504, 5000)$
- b) $[-625, -49)$
- c) $[-625, 0]$
- d) $[-625, 0]$
- e) $[-625, 5000)$

Z przyczyn technicznych rozwiązania zadań sprowadzających się do naszkicowania wykresu nie są zamieszczone.

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>