

9. Funkcje trygonometryczne. Elementy geometrii: twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów, twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, okrąg wpisany i opisany na wielokącie, wielokąty foremne (c.d).

21 lutego 2009 r.

121. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

Rozwiązanie:

Prowadzimy prostą przez środek okręgu. Prosta ta przecina okrąg w punktach A i B , a odcinek $\overline{AB}$ jest średnicą okręgu.

Wybieramy punkt C na okręgu, różny od A i B . Rysujemy odcinki $\overline{AC}$ oraz $\overline{BC}$.

Wówczas kąt $\sphericalangle ACB$ jest prosty jako kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy.

122. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

Rozwiązanie:

Zrobienie rysunku, na którym łączymy punkt O z wierzchołkami trójkąta ABC , oraz prosty rachunek na kątach prowadzi do zależności

$$\sphericalangle AOB = \frac{\sphericalangle ACB}{2} + 90^\circ.$$

W połączeniu z warunkiem

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ$$

otrzymujemy

$$\sphericalangle ACB = 60^\circ.$$

Należy zwrócić uwagę, że trójkąt ABC nie musi być równoboczny. Co więcej, warunek $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ jest równoważny równości podanej w treści zadania.

123. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Rozwiązanie:

Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym otrzymujemy

$$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB,$$

co prowadzi do

$$\sphericalangle ACB = 60^\circ.$$

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 132.

124. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

- a) w czworokąt można wpisać okrąg
- b) na czworokącie można opisać okrąg
- c) czworokąt jest równoległobokiem
- d) czworokąt jest rombem
- e) czworokąt jest prostokątem
- f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
- g) sumy długości przeciwległych boków są równe
- h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
- i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
- j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
- k) przekątne są prostopadłe
- l) przekątne dzielą się na połowy

Odpowiedź:

- a) - g)
- b) - f)
- c) - l)
- d) - j)
- e) - i)
- h) - k)

125. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)

- a) 1, 3, 10, 15
- b) 2, 4, 10, 15
- c) 3, 27, 10, 15
- d) 4, 30, 10, 15

Rozwiązanie:

Czworokąt o bokach zadanej długości istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy długość każdego z boków jest mniejsza od sumy długości trzech pozostałych boków.

Równoważnie: gdy długość najdłuższego z boków jest mniejsza od sumy długości trzech pozostałych boków.

Odpowiedzi:

- a) NIE, gdyż $1 + 3 + 10 = 14 < 15$
- b) TAK, gdyż $2 + 4 + 10 = 16 > 15$
- c) TAK, gdyż $3 + 10 + 15 = 28 > 27$
- d) NIE, gdyż $4 + 10 + 15 = 29 < 30$

126. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Niech A, B, C będą wierzchołkami trójkąta (zrób rysunek), przy czym

$$AB = 3,$$

$$BC = 4,$$

$$CA = 5.$$

Niech S, T, U będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego do boków trójkąta w wyżej wymienionej kolejności. Niech

$$AS = x.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$SB = 3 - x = BT,$$

$$TC = 4 - (3 - x) = 1 + x = CU,$$

$$UA = 5 - (1 + x) = 4 - x = AS,$$

skąd

$$x = 4 - x$$

i w konsekwencji $x = 2$. To pozwala na określenie położenia punktów styczności na bokach trójkąta.

127. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c , aby było to możliwe?

Odpowiedź: $a + c > b$.

Aby to wykazać należy zrobić rysunek i zaznaczyć odcinki równej długości. Równą długość mają odcinki łączące wierzchołek wielokąta z punktami styczności boków wychodzących z tego wierzchołka.

128. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

Rozwiązanie:

Niech A, B, C, D, E będą wierzchołkami pięciokąta (zrób rysunek), przy czym

$$AB = 3,$$

$$BC = 4,$$

$$CD = 5,$$

$$DE = 5,$$

$$EA = 5.$$

Niech S, T, U, V, W będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego do boków pięciokąta w wyżej wymienionej kolejności. Niech

$$AS = x.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} SB &= 3 - x = BT, \\ TC &= 4 - (3 - x) = 1 + x = CU, \\ UD &= 5 - (1 + x) = 4 - x = DV, \\ VE &= 6 - (4 - x) = 2 + x = EW, \\ WA &= 7 - (2 + x) = 5 - x = AS, \end{aligned}$$

skąd

$$x = 5 - x$$

i w konsekwencji $x = 5/2$. To pozwala na określenie położenia punktów styczności na bokach trójkąta.

Należy przy tym upewnić się, że długości odcinków, na które dzielą boki pięciokąta punkty styczności, są dodatnie.

129. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

Odpowiedź: Należy zrobić rysunek i zaznaczyć odcinki równej długości.

130. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)¹ na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)¹.

Rozwiązanie:

Podana równość jest warunkiem **koniecznym**. Aby to wykazać rysujemy sześciokąt opisany na okręgu i zaznaczamy odcinki równej długości.

Nie jest ona warunkiem **dostatecznym**. Przykładem może być sześciokąt o bokach (w kolejności): 1, 1, 1000000, 1, 1, 1000000.

131. Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

Odpowiedź:

Przykład 1: Trójkąt o kątach $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ dzielimy dwusieczną kąta prostego.

Przykład 2: Trójkąt o kątach $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ dzielimy dwusieczną jednego z kątów o mierze 72° .

¹niepotrzebne skreślić

Przykład 3: Trójkąt o kątach 36° , 36° , 108° dzielimy trójsieczną kąta rozwartego, tzn. prostą dzielącą go na kąty o miarach w stosunku 2:1, czyli w tym wypadku 72° i 36° .

Przykład 4: Trójkąt o kątach 3α , 3α , α , gdzie

$$\alpha = \frac{180^\circ}{7}$$

dzielimy **odpowiednią** trójsieczną jednego z kątów o mierze 3α .

132. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

- a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
- c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
- d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

Odpowiedź:

- a) Dla każdego $n \geq 3$.
- b) Dla każdego nieparzystego $n \geq 3$.
- c) Dla każdego nieparzystego $n \geq 3$.
- d) Dla każdego $n \geq 3$.

Wyjaśnienie błędu w rozwiązaniu zadania 123.

123. Co prawda kąt środkowy ma miarę dwa razy większą od kąta wpisanego w okrąg opartego na tym samym łuku, jednak w przypadku, gdy kąt środkowy jest wklęsły (tzn. ma miarę większą od 180°) zapis $\sphericalangle AOB$ oznacza kąt wypukły.

W tym wypadku zależność między kątem wpisanym i środkowym przyjmuje postać

$$\sphericalangle AOB = 360^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ACB,$$

co w połączeniu z równością

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ$$

prowadzi do

$$\sphericalangle ACB = 100^\circ.$$

Ostatecznie poprawna odpowiedź brzmi: Kąt $\sphericalangle ACB$ ma miarę 60° lub 100° .

Zwrócić należy uwagę, że ten sam problem mógłby potencjalnie wystąpić w zadaniu **122**. Jednak środek okręgu wpisanego leży zawsze wewnątrz trójkąta i taka sytuacja jak w zadaniu **123** nie ma miejsca.

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>