1. Liczby naturalne, podzielność, silnie, reszty z dzielenia kwadratów i sześcianów przez małe liczby, cechy podzielności przez 2, 4, 8, 5, 25, 125, 3, 9.

26 września 2009 r.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie. Zaznaczyć jednak należy, że nie ma w tej kwestii uzgodnionego nazewnictwa i w wielu podręcznikach liczba 0 jest uważana za liczbę naturalną.

1. Uzupełnić cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy .... jest podzielna przez 9.

2. Uzupełnić uogólnioną cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje ....

3. Skrytykować i poprawić podane sformułowanie cechy podzielności przez 4.
Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy jej dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 4.

4. Uzupełnić cechę podzielności przez 12:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k ....

5. Wyjaśnić i poprawić błąd w następującym wyprowadzeniu cechy podzielności przez 24:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4 i 6. Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez jej dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 4. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest parzysta, a suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Łącząc powyższe otrzymujemy:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
(i) liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4,
(ii) suma cyfr liczby k jest podzielna przez 3,
(iii) cyfra jedności liczby k jest parzysta.

6. Czy podana cecha podzielności przez 4 jest poprawna? Jeśli nie, to na czym polega błąd i jak go naprawić?
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4.

7. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

8. W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę podzielną przez 72. Podać wszystkie rozwiązania.

9. Podać, bez wykonywania bezpośrednich obliczeń, trzy ostatnie cyfry liczby 23!

10. Która z liczb jest większa
a) $10!$ czy 10^{10} ?
b) $20!$ czy 10^{10} ?
c) $20!$ czy $(10!)^2$?
d) $100!$ czy $(10!)^{10}$?
e) $10!$ czy $6!\cdot 7!$?

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
a) liczba $7n+8$ przy dzieleniu przez 7 ?
b) liczba $6n+11$ przy dzieleniu przez 3 ?
c) liczba $10n-3$ przy dzieleniu przez 10 ?
d) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10 ?
e) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n=1$?

12. Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.

13. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 4? Przez 8? Przez 5?

14. Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

15. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy,

gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d.

17. Uzupełnić cechę podzielności przez 1125:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 1125 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez .... ostatnie cyfry liczby k ....

18. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2-n jest parzysta, liczba n^3-n jest podzielna przez 6, a liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

Wskazówka: $n^5-n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+$coś.

2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

19. Wskazać takie liczby naturalne m, n, że

$$m^3n^4=2^{11}\cdot 3^9\cdot 5^{13}\,.$$