

10. Elementy kombinatoryki geometrycznej: suma kątów wielokąta, liczba przekątnych wielokąta, porównywanie pól wielokątów w oparciu o proste zależności geometryczne jak np. przystawanie i zawieranie, rozpoznawanie przystających konfiguracji geometrycznych (c.d).

13 marca 2010 r.

137. Dla których liczb naturalnych n istnieje n -kąta wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160° ?

Rozwiązanie:

Suma miar kątów wewnętrznych n -kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$. Załóżmy, że wielokąt ma k kątów równych 60° i $n-k$ kątów równych 160° . Wówczas porównanie sumy kątów prowadzi do równania

$$180(n-2) = 60k + 160(n-k),$$

co daje kolejno

$$180n - 360 = 160n - 100k$$

$$20n + 100k = 360.$$

Pamiętajmy przy tym, że $0 \leq k \leq n$. Przy tym ograniczeniu powyższe równanie jest spełnione przez 4 pary (n, k) : $(3, 3)$, $(8, 2)$, $(13, 1)$, $(18, 0)$. Nietrudno stwierdzić, że w każdym przypadku istnieje wielokąt o zadanych kątach.

Odpowiedź: Dla $n=3, 8, 13$ i 18 .

138. Dziewięciokąt $A_1A_2A_3\dots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta

- a) $A_1A_3A_7$
- b) $A_2A_3A_8$
- c) $A_3A_4A_5$

Odpowiedź:

- a) kąty przy wierzchołkach A_1, A_3, A_7 mają miary odpowiednio $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$
- b) kąty przy wierzchołkach A_2, A_3, A_8 mają miary odpowiednio $100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$
- c) kąty przy wierzchołkach A_3, A_4, A_5 mają miary odpowiednio $20^\circ, 140^\circ, 20^\circ$

139. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.

- a) A_1A_7, A_3A_9
- b) A_1A_5, A_2A_8
- c) A_1A_5, A_3A_7
- d) A_1A_6, A_4A_9

Odpowiedź:

- a) $A_kA_{k+6}, k = 2, 4, 5, 6$

- b) A_3A_{11}
- c) A_4A_{10}
- d) A_5A_{11}

140. Dowieść, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2A_3\dots A_{12}$ przekątne A_1A_8 , A_3A_{11} , A_5A_{12} przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Podane przekątne przecinają się w jednym punkcie, gdyż są dwusiecznymi kątów trójkąta $A_1A_5A_{11}$.

141. Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających

- a) $A_1A_2A_4A_9$
- b) $A_1A_3A_7A_{11}$
- c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
- d) $A_1A_6A_9A_{10}$
- e) $A_1A_4A_6A_{11}$
- f) $A_1A_2A_3A_9$
- g) $A_1A_6A_8A_{11}$
- h) $A_1A_3A_4A_8$

Które czworokąty mają równe pola?

Odpowiedź: Pary czworokątów przystających to:

- a) - d)
- b) - h)
- c) - f)
- e) - g)

Równe pola mają ponadto a), d), e), g).

142. Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3\dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k , że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym

- a) $i = 1, j = 2$
- b) $i = 1, j = 5$
- c) $i = 1, j = 6$
- d) $i = 1, j = 7$

Odpowiedź:

- a) $i = 1, j = 2, k = 8$
- b) $i = 1, j = 5, k = 9$ (lub $k = 10$)
- c) $i = 1, j = 6, k = 9$ (lub $k = 10$ lub $k = 11$)
- d) $i = 1, j = 7, k = 8$ (lub $k = 13$)

143. Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości

od jego boków?

Odpowiedź: Każdy ma taką samą.

144. Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

Odpowiedź: Środek ciężkości.

145. Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?

Odpowiedź: Każdy ma taką samą.

146. Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

Odpowiedź: Punkt przecięcia przekątnych.

147. W wierzchołkach kwadratu o boku 1 km znajdują się 4 domy. Czy można zbudować sieć dróg o łącznej długości mniejszej od $2\sqrt{2}$ km, umożliwiającą dojście z każdego domu do każdego innego?

Odpowiedź: Tak. Można zbudować sieć dróg o łącznej długości równej $1 + \sqrt{3}$ km.

W tym celu zamiast narzucającego się połączenia domów ze środkiem kwadratu, należy utworzyć dwa rozwidlenia. Z każdego z nich powinny wychodzić 3 drogi tworzące kąty 120° . Dwie z tych dróg powinny prowadzić do dwóch sąsiednich wierzchołków kwadratu, a trzecia do drugiego rozwidlenia.

148. Chomik ma pod ziemią 4 spizarnie w wierzchołkach czworościanu foremnego o krawędzi 1 m. Czy może zbudować sieć korytarzy o łącznej długości mniejszej od $\sqrt{6}$ m, łączących te spizarnie?

Odpowiedź: Tak. Najkrótsza sieć korytarzy składa się z 5 odcinków, ułożonych podobnie jak w zadaniu poprzednim.

Niech A, B, C, D będą wierzchołkami czworościanu, a P, Q takimi punktami odcinka łączącego środki krawędzi AB i CD , że odcinki AP, BP, PQ tworzą kąty 120° oraz odcinki CQ, DQ, PQ tworzą kąty 120° .

Wówczas sieć złożona z odcinków AP, BP, PQ, CQ, DQ ma łączną długość mniejszą od $\sqrt{6}$ m.

149. Obliczyć pole sześciokąta foremnego o boku 1.

Odpowiedź: Ponieważ sześciokąt foremny można zbudować z 6 trójkątów równobocznych o boku 1, a pole każdego trójkąta jest równe $\sqrt{3}/4$, otrzymujemy

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

150. Obliczyć pole dwunastokąta foremnego o boku 1.

Odpowiedź: Na każdym boku sześciokąta foremnego zbudujemy kwadrat. Łącząc odpowiednie wierzchołki kwadratów otrzymamy dwunastokąt foremny zbudowany z sześciokąta foremnego, 6 kwadratów i 6 trójkątów równobocznych. Zatem pole dwunastokąta jest równe

$$6 + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3}.$$

151. W 101-kącie foremnym pomalowano na czerwono dowolne 52 wierzchołki. Dowieść, że istnieje trójkąt równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są czerwone.

Rozwiązanie:

Wyberzmy dowolny czerwony wierzchołek i poprowadźmy przez niego prostą zawierającą średnicę okręgu opisanego na 101-kącie. Wówczas pozostałych 100 wierzchołków 101-kąta tworzy 50 par wierzchołków symetrycznych względem tej prostej. Wśród tych wierzchołków, 51 jest czerwonych, istnieje więc co najmniej jedna para złożona z dwóch czerwonych wierzchołków. Para ta w połączeniu z wierzchołkiem wybranym na początku, wyznacza trójkąt równoramienny spełniający warunki zadania.

11. Zadanie na pożegnanie.

152. Czy wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = x^{20} + 4$ się przecinają?

Rozwiązanie:

Nietrudno ustalić, że w pobliżu zera wykresy się nie przecinają, a przy tym $f(x) < g(x)$ dla x niezbyt odległych od zera.

Pierwsza myśl: Funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż funkcja wielomianowa, zatem wartości funkcji f powinny dla dużych x przewyższyć wartości funkcji g . Stąd wynika, że wykresy się przetną. Dla pełnej precyzji matematycznej wypadałoby w tym miejscu skorzystać z własności Darboux funkcji ciągłych, jednak możemy ten element potraktować bardziej intuicyjnie.

Doprecyzowanie: Spróbujmy porównać wartości funkcji f i g dla konkretnych wartości argumentu. Ze względu na postać funkcji f najlepiej do tego celu nadają się potęgi dwójki.

I tak dla $x = 128$ otrzymujemy

$$f(128) = 2^{128}$$

oraz

$$g(128) = 2^{140} + 4,$$

skąd

$$f(128) < g(128).$$

Dla $x = 256$ otrzymujemy

$$f(256) = 2^{256}$$

oraz

$$g(256) = 2^{160} + 4,$$

skąd

$$f(256) > g(256).$$

Zatem wykresy funkcji f i g przecinają się - punkt przecięcia odpowiada pewnemu argumentowi z przedziału $(128, 256)$.

Refleksja: Dla $x = 128$ wykres funkcji wielomianowej jest jeszcze powyżej wykresu funkcji potęgowej. Przy tym

$$f(128) = 2^{128} \approx 3,4 \cdot 10^{38}.$$

Gdzie znajduje się punkt wykresu funkcji f odpowiadający $x = 128$?

Przyjmując za jednostkę na osiach 1 cm oraz zakładając rozmiar wszechświata rzędu 10^{28} cm, stwierdzamy, że ten punkt znajduje się kilkadziesiąt miliardów wszechświatów dalej. Wykresy funkcji f i g już dawno opuściły nasz wszechświat, a jeszcze daleko im do przecięcia!

Sytuacji nie uratuje nawet przyjęcie na osiach jednostki równej średnicy elektronu (rzędu wielkości 10^{-13} cm). Wykresy funkcji f i g nadal nie przecinają się w obrębie naszego wszechświata.

Czy możemy więc jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie postawione w treści zadania?

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>