1. Liczby naturalne, podzielność, silnie, reszty z dzielenia kwadratów i sześcianów przez małe liczby, cechy podzielności przez 2, 4, 8, 5, 25, 125, 3, 9.

26 września 2009 r.

Uwaga: Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną, tzn. liczby naturalne są to liczby całkowite dodatnie. Zaznaczyć jednak należy, że nie ma w tej kwestii uzgodnionego nazewnictwa i w wielu podręcznikach liczba 0 jest uważana za liczbę naturalną.

1. Uzupełnić cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy .... jest podzielna przez 9.

Odpowiedź:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy **suma cyfr liczby k** jest podzielna przez 9.

2. Uzupełnić uogólnioną cechę podzielności przez 9:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje ....

Odpowiedź:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje **suma cyfr liczby k.**

3. Skrytykować i poprawić podane sformułowanie cechy podzielności przez 4.
Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy jej dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 4.

Rozwiązanie:
Sformułowanie *dwie ostatnie cyfry są podzielne przez 4* sugeruje, że każda z tych cyfr musi być podzielna przez 4, jak np. w liczbie typu ...44 lub ...80, ale już nie ...12 czy ...28. Tymaczasem chodzi o to, aby **liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k była podzielna przez 4.**

4. Uzupełnić cechę podzielności przez 12:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k ....

Odpowiedź:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k **jest podzielna przez 3** a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k **jest podzielna przez 4.**

5. Wyjaśnić i poprawić błąd w następującym wyprowadzeniu cechy podzielności przez 24:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4 i 6. Liczba jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez jej dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 4. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest parzysta, a suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Łącząc powyższe otrzymujemy:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
(i) liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4,
(ii) suma cyfr liczby k jest podzielna przez 3,
(iii) cyfra jedności liczby k jest parzysta.

Rozwiązanie:
Nie jest prawdą, że liczba jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 4 i przez 6. Na przykład liczba 12 jest podzielna i przez 4 i przez 6, ale przez 24 już nie. Natomiast jest prawdą, że liczba jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 3 i przez 8. Istotne jest to, że liczby 3 i 8 są względnie pierwsze (nie mają wspólnego dzielnika większego od 1), natomiast liczby 4 i 6 mają wspólny dzielnik 2. Sformułowana w zadaniu cecha podzielności jest faktycznie cechą podzielności przez 12=NWW(4,6), przy czym jest ona sformułowana dziwacznie, bo warunek (iii) niczego nowego nie wnosi wobec warunku (i) i można go po prostu pominąć.

Natomiast poprawnie sformułowana cecha podzielności przez 24 brzmi:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 24 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące **dwa** warunki:
(i)′ liczba utworzona przez **trzy** ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez **8,**
(ii) suma cyfr liczby k jest podzielna przez 3.

6. Czy podana cecha podzielności przez 4 jest poprawna? Jeśli nie, to na czym polega błąd i jak go naprawić?
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie:
Tak, to jest poprawna cecha podzielności przez 4, gdyż powyższe sformułowanie jest prawdziwe.

Natomiast jest ona niepotrzebnie skomplikowana. Istotą cech podzielności jest uproszczenie rachunków potrzebnych do ustalenia podzielności, powinny one więc odwoływać się do możliwie prostych operacji na możliwie małych liczbach. W praktyce nie ma więc sensu rozważanie końcówki trzycyfrowej tam, gdzie dwucyfrowa w zupełności wystarczy. Ale gdyby ktoś z powodów, które pozostaną jego słodką tajemnicą, sprawniej operował na liczbach trzycyfrowych niż dwucyfrowych, to powyższa cecha podzielności przez 4 jest akurat dla niego wymarzona.

Prawdziwa jest też następująca cecha podzielności przez 1:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 1 wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów cyfr liczby k jest podzielna przez 1.

Przykład: W liczbie 123456789 suma kwadratów cyfr jest równa 285, a ponieważ liczba 285 jest podzielna przez 1, więc także liczba 123456789 jest podzielna przez 1. No, no, kto by pomyślał? Tylko, czy naprawdę musimy stosować taką maszynerię, aby ustalić podzielność przez 1?

7. W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie:
Liczba jest podzielna przez 75 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 25 (czyli ma jedną z następujących końcówek dwucyfrowych: 00, 25, 50, 75) i przez 3 (czyli suma jej cyfr jest podzielna przez 3).

Niech **x** będzie cyfrą, którą mamy zamiar wpisać.

Skoro liczba 3x20000001x5 ma być podzielna przez 25, to $x=2$ lub $x=7$. Suma cyfr jest wówczas równa $11+x$, czyli odpowiednio 15 i 25. Tylko pierwsza z tych liczb jest podzielna przez 3, zatem jedyną cyfrą spełniającą warunki zadania jest $x=2$, co po wpisaniu daje liczbę 322000000125.

8. W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę podzielną przez 72. Podać wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie:
Liczba jest podzielna przez 72 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 8 (czyli jej trzycyfrowa końcówka tworzy liczbę podzielną przez 8) i przez 9 (czyli suma jej cyfr jest podzielna przez 9).

Niech **xy** będą cyframi, które mamy zamiar wpisać.

Skoro liczba 3120000001xy ma być podzielna przez 8, to jej trzycyfrowa końcówka 1xy musi być liczbą podzielną przez 8, co daje możliwe trzycyfrowe końcówki 104, 112, 120, ... i tak co 8 aż do 192. Suma cyfr rozważanej liczby jest równa $7+x+y$, co jest równe odpowiednio 11, 10, **9** (dla $x=2$, $y=0$). Zatem liczbą spełniającą waruni zadania jest liczba **312000000120**. Kolejna wielokrotność liczby 72 jest oczywiście większa o 72 i wynosi **312000000192**, a w następnej wielokrotności cyfra setek jest już równa 2. Tak więc istnieją dwie liczby spełniające warunki zadania.

9. Podać, bez wykonywania bezpośrednich obliczeń, trzy ostatnie cyfry liczby 23!

Rozwiązanie:
W iloczynie $23!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 23$ występują czynniki 5, 10, 20, skąd wynika, że liczba 23! jest podzielna przez $5\cdot 10\cdot 20=1000$. Liczby podzielne przez 1000 to te, których trzy-

cyfrowa końcówka składa się z samych zer, zatem ostatnie trzy cyfry liczby 23! to trzy zera.

10. Która z liczb jest większa
a) $10!$ czy 10^{10} ?
b) $20!$ czy 10^{10} ?
c) $20!$ czy $(10!)^2$?
d) $100!$ czy $(10!)^{10}$?
e) $10!$ czy $6!\cdot 7!$?

Odpowiedź:
a) $10! < 10^{10}$
b) $20! > 10^{10}$
c) $20! > (10!)^2$
d) $100! > (10!)^{10}$
e) $10! = 6!\cdot 7!$

W punktach **a)-d)** wystarczy zapisać obie liczby w naturalny sposób w postaci iloczynu. W każdym przypadku oprócz **b)** obydwa iloczyny mają tyle samo czynników, przy czym część czynników jest taka sama w obu iloczynach, a pozostałe czynniki są większe w iloczynie, który ma większą wartość. W punkcie **b)** 20! jest iloczynem 20 czynników, z których 10 jest większych od 10, co daje w iloczynie liczbę większą od 10^{10} (zwróćmy uwagę, że pozostałe czynniki są nie mniejsze od 1).

W punkcie **e)** wystarczy zauważyć, że

$$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 8\cdot 9\cdot 10\,.$$

11. Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
a) liczba $7n+8$ przy dzieleniu przez 7 ?
b) liczba $6n+11$ przy dzieleniu przez 3 ?
c) liczba $10n-3$ przy dzieleniu przez 10 ?
d) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10 ?
e) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n=1$?

Odpowiedź:
a) 1
b) 2
c) 7
d) 7
e) 7

Komentarza wymaga punkt **e)**. Otóż liczba -13 przy dzieleniu przez 10 daje resztę 7. Umawiamy się bowiem, że reszta z dzielenia przez 10 jest jedną z liczb 0, 1, 2, ..., 9. Liczba k przy dzieleniu przez 10 daje iloraz q oraz resztę r, jeżeli $k=10q+r$. Dla $k=-13$

warunki te są spełnione przez $q=-2$ oraz $r=7$. Pamiętajmy, że dodanie lub odjęcie od liczby wielokrotności liczby 10 nie zmienia reszty z dzielenia przez 10, nawet wtedy, gdy w rezultacie otrzymujemy liczby ujemne.

Należy zwrócić uwagę, że niezależnie od matematycznej definicji reszty, niektóre programy komputerowe w wyniku standardowych działań na liczbach całkowitych dają w przypadku liczb ujemnych inne wyniki niż opisane powyżej. Częstokroć wykonując dzielenie z resztą liczby -13 przez 10 otrzymamy w odpowiedzi iloraz -1 i resztę -3. Dlatego też używając programu komputerowego do tego typu obliczeń na liczbach ujemnych należy przeczytać w dokumentacji lub sprawdzić eksperymentalnie jak program zachowa się w takiej sytuacji.

12. Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.

Rozwiązanie:
Wszystkie wyrazy ciągu są podzielne przez 3, a liczba 2008 nie jest, więc nie może pojawić się w ciągu.

13. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3? Przez 4? Przez 8? Przez 5?

Rozwiązanie:
Każda liczba całkowita jest postaci $3n$ lub $3n\pm1$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Kwadrat liczby ma wówczas postać odpowiednio

$$(3n)^2=3\cdot3n^2+0$$
$$(3n\pm1)^2=3\cdot(3n^2\pm2n)+1$$

skąd widać, że możliwe reszty to 0 i 1.

Wniosek: Przy dzieleniu kwadratu liczby całkowitej przez 3 nigdy nie pojawi się reszta 2.

Kwadrat liczby parzystej jest zawsze podzielny przez 4, natomiast każda liczba nieparzysta może być zapisana w postaci $4n\pm1$ (czy wiesz dlaczego?), co po podniesieniu do kwadratu daje

$$(4n\pm1)^2=8\cdot(2n^2\pm n)+1$$

co daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8 (a także przez 4).

Zatem kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 (gdy liczba jest parzysta) lub 1 (gdy liczba jest nieparzysta).

Liczba parzysta może byc podzielna przez 4 (wówczas jej kwadrat jest podzielny przez 16, a w konsekwencji także przez 8) lub może być postaci $4n+2$ i wówczas

$$(4n+2)^2=8\cdot(2n^2+2n)+4$$

Tak więc kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 daje resztę 0, 4 (gdy liczba jest parzysta) lub 1 (gdy liczba jest nieparzysta).

Natomiast z równości

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2 + 0$$

$$(5n \pm 1)^2 = 5 \cdot (5n^2 \pm 2n) + 1$$

$$(5n \pm 2)^2 = 5 \cdot (5n^2 \pm 4n) + 4$$

wnioskujemy, że

Kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 5 daje resztę 0, 1 lub 4.

14. Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? Przez 9?

Rozwiązanie:
Z tożsamości

$$(7n)^3 = 7 \cdot 49n^2 + 0$$

$$(7n \pm 1)^3 = 7 \cdot (49n^3 \pm 21n^2 + 3n) \pm 1$$

$$(7n \pm 2)^3 = 7 \cdot (49n^3 \pm 42n^2 + 12n \pm 1) \pm 1$$

$$(7n \pm 3)^3 = 7 \cdot (49n^3 \pm 63n^2 + 27n \pm 4) \mp 1$$

wynika, że **możliwymi resztami z dzielenia sześcianu liczby całkowitej przez 7 są 0, 1 oraz 6**. Reszta 6 występuje wtedy, gdy w powyższych rachunkach dostajemy -1.

Natomiast z równości

$$(3n)^3 = 9 \cdot 3n^2 + 0$$

$$(3n \pm 1)^3 = 9 \cdot (3n^3 \pm 3n^2 + n) \pm 1$$

wynika, że **możliwymi resztami z dzielenia sześcianu liczby całkowitej przez 9 są 0, 1 oraz 8**. Reszta 8 występuje wtedy, gdy w powyższych rachunkach otrzymujemy -1.

15. Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Liczba mająca sumę cyfr równą 47 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2, nie może być więc kwadratem liczby całkowitej. Natomiast przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2 i z tego powodu nie może być sześcianem.

16. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d, dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d.

Odpowiedź: Za liczbę d można wziąć dowolny dzielnik liczby 100, a mianowicie 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Dla tych liczb cecha podzielności jest prawdziwa, ale nie zawsze stosowanie jej w tej właśnie postaci jest sensowne.

17. Uzupełnić cechę podzielności przez 1125:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 1125 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k ...., a liczba utworzona przez .... ostatnie cyfry liczby k ....

Odpowiedź:
Dla dowolnej liczby naturalnej k, liczba k jest podzielna przez 1125 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k **jest podzielna przez 9,** a liczba utworzona przez **trzy** ostatnie cyfry liczby k **jest podzielna przez 125.**

18. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^2-n jest parzysta, liczba n^3-n jest podzielna przez 6, a liczba n^5-n jest podzielna przez 30.
Wskazówka: $n^5-n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+$coś.

Rozwiązanie:
Liczba $n^2-n=(n-1)\cdot n$ jest parzysta jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Liczba $n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych. Co najmniej jeden z czynników jest parzysty i co najmniej jeden jest podzielny przez 3, zatem iloczyn jest podzielny przez 6.

Podobnie liczba $n^5-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$ jest podzielna przez 6. Ponadto

$$n^5-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2-4+5)=$$
$$=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2-4)+5(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=$$
$$=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+5(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

co jest liczbą podzielną przez 5 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 5. Pierwszy składnik jest podzielny przez 5 jako iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych.

2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.

19. Wskazać takie liczby naturalne m, n, że
$$m^3n^4=2^{11}\cdot 3^9\cdot 5^{13}\,.$$

Rozwiązanie:
Niech
$$m=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$$
$$n=2^d\cdot 3^e\cdot 5^f\,,$$

gdzie a,b,c,d,e,f są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Wówczas dana w zadaniu równość przyjmuje postać
$$2^{3a+4d}\cdot 3^{3b+4e}\cdot 5^{3c+4f}=2^{11}\cdot 3^9\cdot 5^{13}\,,$$

co jest spełnione, o ile

$$3a+4d=11$$

$$3b+4e=9$$

$$3c+4f=13\,.$$

Nietrudno sprawdzić, że powyższe równości są prawdziwe dla

$$a=1,\quad d=2$$

$$b=3,\quad e=0$$

$$c=3,\quad f=1\,,$$

co daje

$$m=2^1\cdot 3^3\cdot 5^3=6750$$

$$n=2^2\cdot 3^0\cdot 5^1=20\,.$$