2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność. (c.d.)

10 października 2009 r.

20. Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

21. Obliczyć NWD$(24!, 24^8)$.

22. Obliczyć NWW$(12^{12}, 18^{18})$.

23. Niech $a=2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b=2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c=2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$.
Obliczyć NWD(a,b,c) oraz NWW(a,b,c).

24. Niech $a=2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b=2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c=2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$.
Obliczyć NWD(a,b,c) oraz NWW(a,b,c).

25. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p+1$ jest pierwsza.

27. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

28. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n\ ?$$

29. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k\ ?$$

30. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k\ ?$$

31. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

32. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

33. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach.

Które spośród liczb mniejszych od 50 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone?

Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n:
Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby $\mathrm{NWD}(m,n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n:
Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby $\mathrm{NWW}(m,n)$.

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:

a) $(\mathrm{NWD}(m,n))^2 = \mathrm{NWD}(m^2,n^2)$

b) $\mathrm{NWD}(a,b,c) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a,b),c)$

34. Obliczyć

a) $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$

b) $\mathrm{NWD}(472851364^{43}, 2^{50})$

c) $\mathrm{NWD}(100000008^{25}, 12^{16})$

d) $\mathrm{NWD}(100000011^{44}, 300^{300})$

e) $\mathrm{NWD}(200000004^{31}, 24^{24})$

f) $\mathrm{NWD}(18465210275^{44}, 10^{47})$

g) $\mathrm{NWD}(7771428426328^{60}, 14^{37})$

h) $\mathrm{NWD}(1122334455666^{50}, 44^{37})$

i) $\mathrm{NWD}(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$

j) $\mathrm{NWD}(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

k) $\mathrm{NWD}(11223344^{8}, 22446688^{13})$

3. Wzory skróconego mnożenia, działania na wielomianach. Procenty. Elementy kombinatoryki: dwumian Newtona i trójkąt Pascala.

35. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+2\sqrt{6}\,.$$

36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2+n}-n<\frac{1}{2}\,.$$

37. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $a^3\ldots b^3=(a+b)\cdot\ldots$

b) $a^3\ldots b^3=(a-b)\cdot\ldots$

c) $a^4\ldots b^4=(a+b)\cdot\ldots$

d) $a^4\ldots b^4=(a-b)\cdot\ldots$

38. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}<n+\frac{112233}{336698}\,.$$

39. Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian

a) x^5+1,

b) x^5-1,

c) x^6+1,

d) x^6-1 ?