2. Liczby pierwsze i złożone, jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność. (c.d.)

10 października 2009 r.

20. Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?

Rozwiązanie:
Z równości
$$2^8 \cdot 18^{10} = 2^{18} \cdot 3^{20} = \mathbf{3} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$$
oraz
$$6^{19} = 2^{19} \cdot 3^{19} = \mathbf{2} \cdot 2^{18} \cdot 3^{19}$$
otrzymujemy
$$2^8 \cdot 18^{10} > 6^{19} .$$

21. Obliczyć NWD$(24!, 24^8)$.

Rozwiązanie:
Rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę 24^8:
$$24^8 = 2^{24} \cdot 3^8 .$$

Jeśli chodzi o rozkład liczby 24!, to interesują nas tylko wykładniki, z jakimi do tego rozkładu wchodzą czynniki pierwsze 2 i 3.

W iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 24$ występuje 12 liczb parzystych, 6 liczb podzielnych przez 4, 3 liczby podzielne przez 8 i jedna liczba podzielna przez 16. Zatem czynnik 2 pojawia się $12+6+3+1=22$ razy. Należy przy tym zwrócić uwagę, że liczby podzielne przez 4 są w tej sumie uwzględnione dwukrotnie: raz wśród 12 liczb parzystych i raz wśród 6 liczb podzielnych przez 4.

Podobnie, czynnik 3 wchodzi do rozkładu liczby 24! z wykładnikiem $8+2=10$.

Zatem
$$24! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot (\text{czynniki, które nas nie interesują}).$$

Stąd
$$\mathrm{NWD}(24!, 24^8) = 2^{\min(22,24)} \cdot 3^{\min(10,8)} = 2^{22} \cdot 3^8 .$$

22. Obliczyć NWW$(12^{12}, 18^{18})$.

Rozwiązanie:
Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze:
$$12^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$$

$$18^{18}=2^{18}\cdot 3^{36}\,,$$

co daje

$$\mathrm{NWW}(12^{12},\,18^{18})=2^{\max(24,18)}\cdot 3^{\max(12,36)}=2^{24}\cdot 3^{36}\,.$$

23. Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 5^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 5^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 7^2$.
Obliczyć $\mathrm{NWD}(a,b,c)$ oraz $\mathrm{NWW}(a,b,c)$.

Odpowiedź:

$$\mathrm{NWD}(a,b,c)=2^{\min(4,6,10)}\cdot 3^{\min(7,11,3)}\cdot 5^{\min(9,5,0)}\cdot 7^{\min(0,0,2)}=2^4\cdot 3^3\cdot 5^0\cdot 7^0=2^4\cdot 3^3$$

$$\mathrm{NWW}(a,b,c)=2^{\max(4,6,10)}\cdot 3^{\max(7,11,3)}\cdot 5^{\max(9,5,0)}\cdot 7^{\max(0,0,2)}=2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^9\cdot 7^2$$

24. Niech $a=2^4\cdot 3^7\cdot 6^9$, $b=2^6\cdot 3^{11}\cdot 4^5$, $c=2^{10}\cdot 3^3\cdot 10^2$.
Obliczyć $\mathrm{NWD}(a,b,c)$ oraz $\mathrm{NWW}(a,b,c)$.

Rozwiązanie:
Aby móc postąpić jak w poprzednim zadaniu, musimy najpierw zapisać rozkłady liczb a,b,c na czynniki pierwsze:

$$a=2^{13}\cdot 3^{16}$$

$$b=2^{16}\cdot 3^{11}$$

$$c=2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^2$$

Dopiero teraz możemy podać NWD i NWW liczb a,b,c:

$$\mathrm{NWD}(a,b,c)=2^{\min(13,16,12)}\cdot 3^{\min(16,11,3)}\cdot 5^{\min(0,0,2)}=2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^0=2^{10}\cdot 3^3$$

$$\mathrm{NWW}(a,b,c)=2^{\max(13,16,12)}\cdot 3^{\max(16,11,3)}\cdot 5^{\max(0,0,2)}=2^{16}\cdot 3^{16}\cdot 5^2$$

25. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Wobec równości

$$n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$$

oraz nierówności $n+1>1$, podana liczba jest pierwsza tylko wtedy, gdy $n-1=1$ oraz liczba $n+1$ jest pierwsza.

Odpowiedź: $n=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania i wówczas $n^2-1=3$.

26. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $3p+1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Dla $p=2$ otrzymujemy liczbę pierwszą $3p+1=7$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 2, to liczba $3p+1$ jest parzysta i większa od 2, a więc jest złożona.

Odpowiedź: $p=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

27. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Dla $p=3$ otrzymujemy liczbę pierwszą $p^2+2=11$.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą różną od 3, to liczba p jest niepodzielna przez 3, skąd liczba p^2 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. W konsekwencji liczba p^2+2 jest podzielna przez 3, a ponieważ jest większa od 3, nie może być pierwsza.

Odpowiedź: $p=3$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

28. Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n\ ?$$

Rozwiązanie:
Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^m \cdot 3^m = 2^{2n} \cdot 3^n\,,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m = 2n \\ m = n\,. \end{cases}$$

Powyższy układ równań ma tylko jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych: $m=n=0$, nie ma więc rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m,n spełniające podane równanie.

29. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k\ ?$$

Rozwiązanie:
Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^{m+2n} \cdot 3^{m+n} = 2^k \cdot 3^{2k}\,,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m+2n = k \\ m+n = 2k\,. \end{cases}$$

Odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy

$$n = -k\,,$$

co nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Odpowiedź: Nie istnieją liczby naturalne m,n,k spełniające podane równanie.

30. Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k\,?$$

Rozwiązanie:
Porównując rozkłady na czynniki pierwsze obu liczb otrzymujemy

$$2^{m+3n} \cdot 3^{2m+n} = 2^{2k} \cdot 3^k\,,$$

co wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze pociąga równość odpowiednich wykładników w obu rozkładach

$$\begin{cases} m+3n &= 2k \\ 2m+n &= k\,. \end{cases}$$

Odejmując stronami od potrojonego równania drugiego równanie pierwsze otrzymujemy

$$5m = k\,,$$

co po wstawieniu do drugiego równania daje

$$2m+n = 5m\,,$$

skąd

$$n = 3m\,.$$

Przyjmując $m=1$ otrzymujemy $n=3$ oraz $k=5$. Jak łatwo sprwadzić, liczby te spełniają warunki zadania.

Odpowiedź:
Liczby naturalne m,n,k spełniające podane równanie istnieją, np. $(m,n,k)=(1,3,5)$.

31. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

Rozwiązanie:
Dla $m=1$, $n=7$ iloczyn $mn=7$ jest podzielny przez 7, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 1, 7 są liczby 1 oraz 7. Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1 i 7.

Liczba $d=1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Z kolei liczba 7 jest pierwsza, a zatem jest ona dzielnikiem iloczynu wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników. Tak więc dla dowolnych liczb naturalnych m, n podzielność iloczynu mn przez 7 pociąga za sobą podzielność przez 7 co najmniej jednej z liczb m, n, skąd wynika, że $d=7$ również spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1 i 7.

32. To samo z liczbą 24 zamiast 7.

Rozwiązanie:

Dla $m=4$, $n=6$ iloczyn $mn=24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 4, 6 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 6.

Z kolei dla $m=3$, $n=8$ iloczyn $mn=24$ jest podzielny przez 24, a jedynymi dzielnikami co najmniej jednej z liczb 3, 8 są liczby 1, 2, 3, 4 oraz 8.

Zatem jedynymi kandydatami na liczby d spełniające warunki zadania są 1, 2, 3 i 4.

Liczba $d=1$ spełnia warunki zadania w oczywisty sposób.

Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, to jest podzielna przez 2, a ponieważ 2 jest liczbą pierwszą, co najmniej jeden z czynników m, n jest podzielny przez 2. Stąd $d=2$ spełnia warunki zadania. W analogiczny sposób stwierdzamy, że warunki zadania są spełnione przez $d=3$.

Dotychczasowe rozumowania w zasadzie nie różnią się od rozumowań wykorzystanych w poprzednim zadaniu. Jednak liczba $d=4$ wymaga nieco innego podejścia.

Jeżeli liczba mn jest podzielna przez 24, a więc w konsekwencji przez 8, to czynnik 2 wchodzi do rozkładu liczby mn na czynniki pierwsze z wykładnikiem równym co najmniej 3.

Jeżeli

$$m=2^a\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})$$

oraz

$$n=2^b\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})\,,$$

to

$$mn=2^{a+b}\cdot(\text{iloczyn potęg nieparzystych liczb pierwszych})\,,$$

a przy tym, jak ustaliliśmy, $a+b\geqslant 3$. Stąd $a\geqslant 2$ lub $b\geqslant 2$, a w konsekwencji odpowiednio m lub n jest podzielne przez 4.

Odpowiedź: Liczbami spełniającymi warunki zadania są 1, 2, 3 i 4.

33. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno używają tam tylko liczb naturalnych dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1. To ograniczenie nie pozwala na wykonywanie dodawania, ale mnożenie nie sprawia kłopotu. Można też bez problemu mówić o podzielności liczb. Liczba 4 jest uważana za liczbę pierwszą, bo oprócz 1 i 4 nie ma żadnego innego dzielnika spośród liczb używanych na Bergamutach.

Które spośród liczb mniejszych od 50 są na Bergamutach uważane za pierwsze, a które za złożone?

Czy na Bergamutach prawdziwe jest twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze?

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych dzielników liczb m i n:

Liczba d jest wspólnym dzielnikiem liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy d jest dzielnikiem liczby NWD(m,n).

Czy na Bergamutach prawdziwa jest następująca charakteryzacja wspólnych wielokrotności liczb m i n:
Liczba w jest wspólną wielokrotnością liczb m i n wtedy i tylko wtedy, gdy w jest wielokrotnością liczby NWW(m,n).

Czy na Bergamutach prawdziwe są wzory:
a) $(\mathrm{NWD}(m,n))^2 = \mathrm{NWD}(m^2,n^2)$
b) $\mathrm{NWD}(a,b,c) = \mathrm{NWD}(\mathrm{NWD}(a,b),c)$

Rozwiązanie:
Na Bergamutach liczbami pierwszymi mniejszymi od 50 są: 4, 7, 10, 13, 19, 22, 25, 31, 34, 37, 43, 46, a złożone są $16=4\cdot 4$, $28=4\cdot 7$, $40=4\cdot 10$ oraz $49=7\cdot 7$.

Na Bergamutach nie zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze, gdyż np. liczba 100 ma dwa istotnie różne rozkłady na czynniki pierwsze:

$$100=4\cdot 25=10\cdot 10\,.$$

Charakteryzacja wspólnych dzielników nie jest prawdziwa, np. liczby $m=40$ i $n=100$ mają wspólny dzielnik 4, który nie jest dzielnikiem liczby $\mathrm{NWD}(40,100)=10$.

Ten sam przykład obala charakteryzację wspólnych wielokrotności, mamy bowiem $\mathrm{NWW}(40,100)=400$, a liczba 1000 nie jest wielokrotnością liczby 400, pomimo iż jest wspólną wielokrotnością liczb 40 i 100.

a) Nie, np. dla $m=4$, $n=10$ mamy $\mathrm{NWD}(4,10)=1$, ale $\mathrm{NWD}(16,100)=4$.

b) Nie, np. dla $a=40$, $b=100$, $c=4$ mamy $\mathrm{NWD}(a,b,c)=\mathrm{NWD}(40,100,4)=4$, ale $\mathrm{NWD}(a,b)=\mathrm{NWD}(40,100)=10$ i $\mathrm{NWD}(10,4)=1$.

34. Obliczyć
a) $\mathrm{NWD}(254678914^{37}, 10^{43})$

Rozwiązanie:
Ponieważ

$$10^{43}=2^{43}\cdot 5^{43}$$

interesują nas wykładniki dwójki i piątki w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby

$$254678914^{37}\,.$$

Korzystając z cech podzielności przez 5, 2 i 4, ustalamy, że liczba 254678914 nie jest podzielna przez 5, a ponadto jest podzielna przez 2, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 254678914^{37} czynnik 5 się nie pojawia, a czynnik 2 pojawia się w 37-mej potędze.

Skoro $\min(37,43)=37$, otrzymujemy

$$\mathrm{NWD}\left(254678914^{37}, 10^{43}\right)=2^{37}\,.$$

b) NWD$(472851364^{43}, 2^{50})$

Rozwiązanie:
Ponieważ liczba 472851364 jest podzielna przez 4, czynnik 2 wchodzi do rozkładu liczby 472851364^{43} z wykładnikiem równym co najmniej 86.

Stąd
$$\mathrm{NWD}\left(472851364^{43}, 2^{50}\right) = 2^{50}\,.$$

c) NWD$(100000008^{25}, 12^{16})$

Rozwiązanie:
Skoro $12^{16} = 2^{32} \cdot 3^{16}$, interesuje nas występowanie czynników 2 i 3 w rozkładzie liczby 100000008^{25}. Ponieważ liczba 100000008 jest podzielna przez 4 i przez 9, dwójka i trójka występują w rozkładzie liczby 100000008^{25} w co najmniej 50-tych potęgach. To wystarczy, aby stwierdzić, że
$$\mathrm{NWD}\left(100000008^{25}, 12^{16}\right) = 2^{32} \cdot 3^{16}\,.$$

Można też podać wynik w postaci 12^{16}, bo okazało się, że druga liczba jest dzielnikiem pierwszej.

d) NWD$(100000011^{44}, 300^{300})$

Rozwiązanie:
Wobec $300^{300} = 2^{600} \cdot 3^{300} \cdot 5^{600}$ interesują nas czynniki 2, 3, 5 w rozkładzie liczby
$$100000011^{44}\,.$$
Ponieważ liczba 100000011 jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 2, 5, 9, z interesujących nas czynników w liczbie 100000011^{44} pojawia się trójka w potędze 44.

Zatem
$$\mathrm{NWD}\left(100000011^{44}, 300^{300}\right) = 3^{44}\,.$$

e) NWD$(200000004^{31}, 24^{24})$

Rozwiązanie:
Wobec $24^{24} = 2^{72} \cdot 3^{24}$ interesują nas czynniki 2, 3 w rozkładzie liczby
$$200000004^{31}\,.$$
Ponieważ liczba 200000004 jest podzielna przez 3 i 4, ale nie jest podzielna przez 8, 9, z interesujących nas czynników w liczbie 200000004^{31} pojawia się dwójka w potędze 62 oraz trójka w potędze 31.

Stąd
$$\mathrm{NWD}\left(200000004^{31}, 24^{24}\right) = 2^{62} \cdot 3^{24}\,.$$

f) NWD$(18465210275^{44}, 10^{47})$

Rozwiązanie:
Skoro $10^{47} = 2^{47} \cdot 5^{47}$ interesują nas czynniki 2, 5 w rozkładzie liczby
$$18465210275^{44}\,.$$
Ponieważ liczba 18465210275 jest nieparzysta i podzielna przez 25, z interesujących nas czynników w liczbie 18465210275^{44} pojawia się piątka w potędze co najmniej 88.

Zatem
$$\mathrm{NWD}\left(18465210275^{44}, 10^{47}\right) = 5^{47}\,.$$

g) NWD$(7771428426328^{60}, 14^{37})$

Rozwiązanie:
Mamy $14^{37} = 2^{37} \cdot 7^{37}$. Zatem interesują nas czynniki 2, 7 w rozkładzie liczby
$$7771428426328^{60}\,.$$
Ponieważ liczba 7771428426328 jest parzysta, w rozkładzie liczby 7771428426328^{60} pojawia się dwójka w potędze co najmniej 60-tej.

Pozornie pojawia się problem cechy podzielności przez 7. Ale tylko pozornie, gdyż liczbę 7771428426328 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 7:
$$7'7'7'14'28'42'63'28\,.$$
Zatem liczba ta jest podzielna przez 7 i w rozkładzie liczby 7771428426328^{60} siódemka pojawia się z wykładnikiem co najmniej 60.

Stąd
$$\mathrm{NWD}\left(7771428426328^{60}, 14^{37}\right) = 2^{37} \cdot 7^{37} = 14^{37}\,.$$

h) NWD$(1122334455666^{50}, 44^{37})$

Rozwiązanie:
Mamy $44^{37} = 2^{74} \cdot 11^{37}$. Zatem interesują nas czynniki 2, 11 w rozkładzie liczby
$$1122334455666^{50}\,.$$
Ponieważ liczba 1122334455666 jest parzysta i niepodzielna przez 4, w rozkładzie liczby 1122334455666^{50} pojawia się dwójka w potędze 50-tej.

Wbrew pozorom, nie potrzebujemy cechy podzielności przez 11 gdyż liczbę 1122334455660 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 11:
$$11'22'33'44'55'66'0\,.$$

Liczba 1122334455666 jest większa o 6 od powyższej liczby podzielnej przez 11, zatem sama nie jest podzielna przez 11.

Stąd

$$\mathrm{NWD}\left(1122334455666^{50}, 44^{37}\right) = 2^{50}\,.$$

i) NWD$(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23})$

Rozwiązanie:

Wobec rozkładów

$$14^{17} = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$330^{23} = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23} \cdot 11^{23}$$

mamy

$$\mathrm{NWD}\left(14^{17}, 330^{23}\right) = 2^{17}\,.$$

Ponieważ liczba 12468945716272^{29} jest podzielna przez 2^{17}, otrzymujemy

$$\mathrm{NWD}\left(12468945716272^{29}, 14^{17}, 330^{23}\right) = 2^{17}\,.$$

j) NWD$(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22})$

Rozwiązanie:

Z rozkładów

$$26^{19} = 2^{19} \cdot 13^{19}$$

$$39^{22} = 3^{22} \cdot 13^{22}$$

otrzymujemy

$$\mathrm{NWD}\left(26^{19}, 39^{22}\right) = 13^{19}\,.$$

Ponieważ liczbę 1352263965789126 możemy podzielić na bloki kolejnych cyfr tworzące liczby podzielne przez 13:

$$13'52'26'39'65'78'91'26\,,$$

liczba ta jest podzielna przez 13, skąd

$$\mathrm{NWD}\left(1352263965789126^{44}, 26^{19}, 39^{22}\right) = 13^{19}\,.$$

k) NWD$(11223344^{8}, 22446688^{13})$

Rozwiązanie:

Niech $n = 11223344$. Wówczas zadanie sprowadza się do obliczenia NWD liczb n^8 oraz $2^{13} \cdot n^{13}$. Ponieważ pierwsza z tych liczb jest dzielnikiem drugiej, otrzymujemy

$$\mathrm{NWD}\left(11223344^{8}, 22446688^{13}\right) = 11223344^{8}\,.$$

3. Wzory skróconego mnożenia, działania na wielomianach. Procenty. Elementy kombinatoryki: dwumian Newtona i trójkąt Pascala.

35. Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+2\sqrt{6}\,.$$

Rozwiązanie:

Usuwając niewymierność z mianownika otrzymujemy

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+2\sqrt{6}=\frac{5-2\sqrt{6}}{(5-2\sqrt{6})\cdot(5+2\sqrt{6})}+2\sqrt{6}=\frac{5-2\sqrt{6}}{25-24}+2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5\,.$$

36. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2+n}-n<\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I.

Po obustronnym dodaniu n otrzymujemy nierówność

$$\sqrt{n^2+n}<n+\frac{1}{2}\,.$$

Ponieważ obie strony powyższej nierówności są dodatnie, podnosząc obie strony do kwadratu, dostaniemy nierówność **równoważną**

$$n^2+n<n^2+n+\frac{1}{4}\,,$$

która jest oczywiście prawdziwa.

Sposób II.

Przekształcamy lewą stronę danej w zadaniu nierówności

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{n}{\sqrt{n^2}+n}=\frac{1}{2}\,.$$

37. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $a^3\ldots b^3=(a+b)\cdot\ldots$

b) $a^3\ldots b^3=(a-b)\cdot\ldots$

c) $a^4\ldots b^4=(a+b)\cdot\ldots$

d) $a^4\ldots b^4=(a-b)\cdot\ldots$

Odpowiedź:

a) $a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$

b) $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

c) $a^4-b^4=(a+b)\cdot(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

d) $a^4-b^4=(a-b)\cdot(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

38. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}<n+\frac{112233}{336698}\,.$$

Rozwiązanie:

Ci wszyscy, którym niestraszny ułamek po prawej stronie, mogą podnieść nierówność stronami do sześcianu. Pozostali przenoszą n na lewą stronę otrzymując nierówność

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n<\frac{112233}{336698}\,.$$

Wówczas po skorzystaniu ze wzoru

$$a-b=\frac{(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)\cdot\left(\left(n^3+n^2\right)^{2/3}+\left(n^3+n^2\right)^{1/3}\cdot n+n^2\right)}{\left(n^3+n^2\right)^{2/3}+\left(n^3+n^2\right)^{1/3}\cdot n+n^2}=$$

$$=\frac{n^2}{\left(n^3+n^2\right)^{2/3}+\left(n^3+n^2\right)^{1/3}\cdot n+n^2}<\frac{n^2}{\left(n^3\right)^{2/3}+\left(n^3\right)^{1/3}\cdot n+n^2}=\frac{1}{3}<\frac{112233}{336698}\,.$$

Uwaga: Gdyby na początku było wiadomo, że liczbę po prawej stronie nierówności można oszacować przez 1/3, można byłoby podnieść obie strony wyjściowej nierówności do sześcianu bez konieczności rachowania na ułamkach o wielocyfrowych licznikach i mianownikach.

39. Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian

a) x^5+1,

b) x^5-1,

c) x^6+1,

d) x^6-1 ?

Odpowiedź:

a) $x^{30}-1$ oraz $x^{60}-1$,

b) $x^{30}-1$ oraz $x^{60}-1$,

c) $x^{30}+1$ oraz $x^{60}-1$,

d) $x^{30}-1$ oraz $x^{60}-1$.

`http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/`