

### 3. Wzory skróconego mnożenia, działania na wielomianach. Procenty. Elementy kombinatoryki: dwumian Newtona i trójkąt Pascala. (c.d.)

24 października 2009 r.

40. Skomentować fragment artykułu Anny Zawadzkiej, *Ile waży light?* (Gazeta Wyborcza, 24 sierpnia 2006 r.):

*W Śmietankowym Warmii tłuszczu co prawda 73%, ale nie podano, czy na 100 g, czy na całą kostkę, czyli na 200 g. Z Łaciatym to samo. Napis głosi minimum 82% tłuszczu. Ale na ile? Nie podano. Masło Stołowe z Sokołowa Podlaskiego - 73,5% tłuszczu. Znow nie wiemy, czy na 100 g, czy na kostkę. Zwyczajowo na opakowaniach podaje się ilość tłuszczu na 100 gramów, ale konsument ma prawo tego nie wiedzieć.*

*Odpowiedź:* Zawartość procentowa jest, z definicji, niezależna od wielkości porcji. Dziennikarz poważnej gazety nie ma prawa tego nie wiedzieć.

41. Kilogram ziemniaków kosztuje 50 groszy. Jaka będzie cena ziemniaków, jeżeli ich cena wzrośnie

- a) o 2000%
- b) o 1000%
- c) o 400%
- d) o 200%
- e) o 100%

*Odpowiedź:*

- a) 10,50
- b) 5,50
- c) 2,50
- d) 1,50
- e) 1,00

42. Za 17 złotych i 37 groszy można kupić 30 kg ziemniaków. Ile ziemniaków można będzie kupić za 34 złote i 74 grosze, jeżeli ich cena

- a) wzrośnie o 20%
- b) zmaleje o 20%
- c) wzrośnie o 50%
- d) zmaleje o 50%

Odpowiedź:

- a) 50 kg
- b) 75 kg
- c) 40 kg
- d) 120 kg

43. Czy istnieją takie liczby pierwsze  $p$  i  $q$ , że liczba  $q$  jest od liczby  $p$

- a) większa o 100%
- b) większa o 50%
- c) większa o 40%
- d) większa o 20%
- e) większa o 5%
- f) mniejsza o 5%

Odpowiedź:

- a) NIE.
- b) TAK,  $p = 2$ ,  $q = 3$ .
- c) TAK,  $p = 5$ ,  $q = 7$ .
- d) NIE.
- e) NIE.
- f) NIE.

44. Liczba naturalna  $m$  jest o 25% większa od liczby naturalnej  $n$ . O ile procent największy wspólny dzielnik liczb  $m$  i  $n$  jest mniejszy od ich najmniejszej wspólnej wielokrotności?

Rozwiązanie:

Z założenia

$$m = n + \frac{n}{4}.$$

Oznaczając  $k = n/4$  otrzymujemy  $n = 4k$  oraz  $m = 5k$ . W konsekwencji  $\text{NWD}(m, n) = k$  oraz  $\text{NWW}(m, n) = 20k$ , skąd wynika, że największy wspólny dzielnik jest mniejszy od najmniejszej wspólnej wielokrotności 20-krotnie czyli o **95%**.

45. Liczba naturalna  $m$  jest o 25% mniejsza od liczby naturalnej  $n$ . O ile procent najmniejsza wspólna wielokrotność liczb  $m$  i  $n$  jest większa od ich największego wspólnego dzielnika?

Rozwiązanie:

Z założenia

$$m = n - \frac{n}{4}.$$

Oznaczając  $k = n/4$  otrzymujemy  $n = 4k$  oraz  $m = 3k$ . W konsekwencji  $\text{NWD}(m, n) = k$  oraz  $\text{NWW}(m, n) = 12k$ , skąd wynika, że najmniejsza wspólna wielokrotność jest większa od największego wspólnego dzielnika 12-krotnie czyli o **1100%**.

**46.** Chcemy ulokować w banku pieniądze na 5 lat. Który z dwóch banków powinniśmy wybrać, oferujący 10% rocznie z coroczną kapitalizacją odsetek, czy oferujący 12% rocznie, ale z odsetki dopisywanymi po 5 latach, bez kapitalizacji w trakcie trwania okresu lokaty ?

*Rozwiązanie:*

W drugim banku kwota  $K$  po 5 latach zamieni się na  $1,6 \cdot K$ . Natomiast w pierwszym banku po 5 latach będziemy mieli kwotę

$$\begin{aligned} K \cdot (1 + 0,1)^5 &= K \cdot \left( \binom{5}{0} \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot (0,1)^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot (0,1)^2 + \dots \right) > \\ &> K \cdot (1 + 5 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,01) = 1,6 \cdot K, \end{aligned}$$

a zatem pierwszy bank oferuje korzystniejsze oprocentowanie.

**47.** Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}.$$

*Odpowiedź:* Ponieważ  $\binom{100}{k}$  rośnie wraz ze wzrostem  $k$  w zakresie  $0 \leq k \leq 50$ , otrzymujemy

$$\binom{100}{97} = \binom{100}{3} < \binom{100}{7} < \binom{100}{77} = \binom{100}{23} < \binom{100}{27} < \binom{100}{57} = \binom{100}{43} < \binom{100}{47},$$

**48.** Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych  $n \geq 4$ ,  $k \geq 2$ .

*Rozwiązanie:*

Przekształcając lewą stronę równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3 \cdot \binom{n}{4} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{8} = \frac{(n^2-3n) \cdot (n^2-3n+2)}{8} = \\ &= \frac{\frac{n^2-3n}{2} \cdot \left(\frac{n^2-3n}{2} + 1\right)}{2} = \binom{\frac{n^2-3n}{2}}{2}, \end{aligned}$$

zatem dane w zadaniu równanie jest spełnione dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 4$  oraz

$$k = \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}.$$

**49.** Wskazać taką liczbę  $x$ , że dla dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $k$  prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

*Rozwiązanie:*

Korzystając ze wzoru

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} = \binom{a+1}{b+1}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{n+2}{k+2} &= \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right] + \left[ \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} \right] = \\ &= \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}, \end{aligned}$$

zatem dana w zadaniu równość jest prawdziwa przy  $x = 2$ .

**50.** Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych  $a, b, c$  zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

*Rozwiązanie:*

**Sposób I.**

Lewa strona równości jest równa

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot (b+c)!} \cdot \frac{(b+c)!}{b! \cdot c!} = \frac{(a+b+c)!}{a! \cdot b! \cdot c!}.$$

Analogiczny rachunek pokazuje, że prawa strona danej w zadaniu równości sprowadza się do tego samego wyrażenia.

**Sposób II.**

Na ile sposobów można podzielić  $a+b+c$  uczniów na 3 grupy tak, aby w pierwszej grupie było  $a$  uczniów, w drugiej  $b$  uczniów, a w trzeciej  $c$  uczniów?

Otóż  $a$  uczniów do pierwszej grupy można wybrać na  $\binom{a+b+c}{a}$  sposobów. Z pozostałych  $b+c$  uczniów można wybrać  $b$  uczniów do drugiej grupy na  $\binom{b+c}{b}$  sposobów, a pozostałych  $c$  uczniów utworzy grupę trzecią. Zatem istnieje  $\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b}$  sposobów podziału uczniów na trzy grupy we wskazany sposób.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, przy wyborze najpierw  $b$  uczniów do drugiej grupy, a następnie  $a$  uczniów do pierwszej grupy, otrzymujemy wzór na liczbę możliwych sposobów podziału w postaci  $\binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}$ .

51. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

*Rozwiązanie:*

**Sposób I.**

Rozwijając na sumę  $n$ -tą potęgę dwumianu  $1+1$  otrzymujemy

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \quad (\spadesuit)$$

**Sposób II.**

Ile podzbiorów ma zbiór  $n$ -elementowy?

Z jednej strony, ma on  $2^n$  podzbiorów.

Z drugiej strony ma on:

- $\binom{n}{0} = 1$  podzbiorów 0-elementowych (zbiór pusty)
- $\binom{n}{1} = n$  podzbiorów 1-elementowych
- $\binom{n}{2}$  podzbiorów 2-elementowych
- .....
- $\binom{n}{k}$  podzbiorów  $k$ -elementowych
- .....
- $\binom{n}{n} = 1$  podzbiorów  $n$ -elementowych (cały zbiór)

Zatem zbiór  $n$ -elementowy ma  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$  podzbiorów, skąd

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

52. Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

*Rozwiązanie:*

Rozwijając na sumę  $n$ -tą potęgę dwumianu  $1-1$  otrzymujemy

$$0^n = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}. \quad (\heartsuit)$$

Dodając stronami równości  $(\spadesuit)$  oraz  $(\heartsuit)$  otrzymujemy

$$2^n = 2 \cdot \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots \right),$$

skąd

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots = 2^{n-1}.$$

**53.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

*Rozwiązanie:*

Rozwijając  $2n$ -tą potęgę dwumianu  $1+1$  otrzymujemy

$$4^n = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} > \binom{2n}{n}.$$

**54.** Czy w trójkącie Pascala istnieją trzy liczby stojące w jednym wierszu na kolejnych miejscach i pozostające w proporcji 1:2:3 ?

*Rozwiązanie:*

Założmy, że tymi liczbami są

$$\binom{n}{k-1}, \quad \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k+1}.$$

Wówczas

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k+1}.$$

Skoro pierwsze dwie liczby mają pozostawać w proporcji 1:2, musi być

$$\frac{k}{n-k+1} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$2k = n - k + 1$$

$$3k = n + 1.$$

Podobnie

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Z proporcji 2:3 liczb drugiej i trzeciej wynika

$$\frac{n-k}{k+1} = \frac{3}{2},$$

skąd

$$2n - 2k = 3k + 3$$

$$2n = 5k + 3.$$

Z zależności  $3k = n + 1$  otrzymujemy

$$2n = 6k - 2,$$

co daje

$$5k + 3 = 6k - 2.$$

Stąd otrzymujemy

$$k = 5, \quad n = 14.$$

Jedyna trójka liczb spełniających warunki zadania to

$$\binom{14}{4} = 1001, \quad \binom{14}{5} = 2002, \quad \binom{14}{6} = 3003.$$

**55.** Na okręgu zaznaczono  $n$  punktów i narysowano wszystkie cięciwy o końcach w tych punktach. Okazało się, że żadne trzy z narysowanych cięciw nie mają wspólnego punktu leżącego wewnątrz koła ograniczonego danym okręgiem. Na ile obszarów zostało podzielone koło, jeżeli  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ? Dla jakiej liczby  $n$  koło zostanie podzielone na 256 obszarów?

*Rozwiązanie:*

Uważne zrobienie rysunku i policzenie obszarów pokazuje, że dla  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  liczby obszarów są równe odpowiednio 1, 2, 4, 8, 16.

Widzimy więc, że liczby obszarów są kolejnymi potęgami dwójki. Stąd wzór na liczbę obszarów ma postać  $2^{n-1}$ . Zatem liczba 256 obszarów pojawi się dla  $n = 9$ .

Niestety, **powyższe rozwiązanie jest błędne!** Dla  $n = 6$  liczba obszarów nie jest równa 32, ale 31. Przy  $n = 7$  otrzymujemy 57 obszarów.

A oto poprawne rozwiązanie.

Zanim narysujemy jakąkolwiek cięciwę, okrąg ogranicza **jeden** obszar (koło). Jak zmienia się liczba obszarów po narysowaniu kolejnej cięciwy? Gdy zaczynamy rysować cięciwę, zaczynamy dzielić pewien obszar na dwa obszary. W momencie przecięcia z inną, wcześniej narysowaną cięciwą, zaczynamy dzielić inny obszar. Stąd wynika, że narysowanie cięciwy zwiększa liczbę obszarów o

$$1 + (\text{liczba przecięć z wcześniej narysowanymi cięciwami}).$$

Przez przecięcie cięciw rozumiemy punkt wspólny cięciw niebędący ich wspólnym końcem.

Zatem łączna liczba obszarów po narysowaniu wszystkich cięciw jest równa

$$1 + (\text{liczba cięciw}) + (\text{liczba przecięć cięciw}).$$

Ponieważ każda cięciwa jest wyznaczona przez dwa z wybranych  $n$  punktów, liczba cięciw jest równa  $\binom{n}{2}$ .

Z kolei każdy punkt przecięcia dwóch cięciw wyznacza 4 punkty - końce tych cięciw. Co więcej, każda czwórka punktów wyznacza dokładnie jedną parę przecinających się cięciw (zrób rysunek i zobacz, że 4 punkty wyznaczają 6 cięciw, ale tylko jedna para cięciw przecina się wewnątrz koła). To oznacza, że punktów przecięć cięciw jest tyle, ile czwórek zaznaczonych punktów, czyli  $\binom{n}{4}$ .

Zatem liczba obszarów, na jakie dzieli koło cięciwy, jest równa

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

Ten wzór wyjaśnia, dlaczego dla małych  $n$  liczba obszarów jest równa  $2^{n-1}$ . Otóż dla małych  $n$  zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$$

Po lewej stronie mamy sumę trzech wyrazów  $n$ -tego wiersza trójkąta Pascala, zaś po prawej mamy sumę co drugiego wyrazu, aż do końca wiersza. Jeśli  $n$  jest małe,  $n$ -ty wiersz trójkąta Pascala jest na tyle krótki, że suma po lewej stronie rozciąga się do końca wiersza. To wyjaśnia dlaczego wzór  $2^{n-1}$  na liczbę obszarów początkowo jest prawdziwy, a potem się załamuje.

Wzór załamuje się dla  $n = 6$ , gdzie liczba obszarów jest równa

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4},$$

podczas gdy na podstawie zadania 52 wiemy, że

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 2^5.$$

Poprawna odpowiedź na ostatnie pytanie postawione w zadaniu brzmi:

**256 obszarów pojawi się dla  $n=10$ .**

Otóż dla  $n = 10$  liczba obszarów jest równa

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4},$$

podczas gdy na podstawie zadania 52 wiemy, że

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = 2^9.$$

Jednak z uwagi na równość

$$\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = \\ & = \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + \binom{10}{0} = 2 \left[ \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} \right], \end{aligned}$$

co prowadzi do

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} = 2^8 = 256.$$

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>