

4. Postęp arytmetyczny i geometryczny. Wartość bezwzględna, potęgowanie i pierwiastkowanie liczb rzeczywistych.

14 listopada 2009 r.

Uwaga: Przyjmujemy, że postęp geometryczny ma wszystkie wyrazy różne od zera.

56. Obliczyć sumę postępu geometrycznego

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n.$$

57. Obliczyć sumę postępu arytmetycznego

$$223 + 228 + 233 + \dots + 778.$$

58. Pierwszy, czwarty i dziesiąty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (z zachowaniem kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Wyznaczyć iloraz tego postępu geometrycznego.

59. Wyznaczyć pierwszy wyraz postępu arytmetycznego z poprzedniego zadania, jeśli wiadomo ponadto, że jego siódmy wyraz jest równy 21.

60. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie? W dowolnym postępie arytmetycznym n -wyrazowym o sumie 0, co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

61. Ułożyć sensowną wersję poprzedniego zadania dla postępów geometrycznych.

62. Podać wzór na iloczyn wyrazów postępu geometrycznego.

63. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ dowolny postęp geometryczny n -wyrazowy ma dodatni iloczyn wyrazów?

64. Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ istnieje postęp arytmetyczny n -wyrazowy o sumie n i jednym z wyrazów równym n ?

65. Dla których liczb naturalnych n podany wzór jest poprawnym wzorem na sumę n -wyrazowego postępu arytmetycznego a_1, a_2, \dots, a_n ?

a) $S_n = \frac{a_7 + a_8 + a_{12}}{3} \cdot n$

b) $S_n = \frac{3a_{11} + a_{17}}{4} \cdot n$

c) $S_n = \frac{a_7 + a_8 + a_n}{3} \cdot n$

d) $S_n = \frac{a_4 + a_7 + a_{n-9} + a_n}{4} \cdot n$

66. Dobrać takie liczby A, B (być może zależne od n), aby otrzymać wzór na sumę n -wyrazowego postępu arytmetycznego a_1, a_2, \dots, a_n .

a) $S_n = Aa_1 + Ba_2 \quad (n \geq 3)$

b) $S_n = Aa_3 + Ba_7 \quad (n \geq 7)$

67. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{n - 40\sqrt{n} + 400}.$$

68. Rozwiązać równanie

$$|x - 5| + |x + 7| = 12.$$

69. Która z liczb jest większa

a) $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$?

b) $\frac{17^{667}}{3333^4 + 6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$?

70. Podać co najmniej trzy przykłady par takich liczb wymiernych dodatnich $a < b$, że $a^b = b^a$.

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się od góry, tzn.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

71. Uprościć wyrażenie

$$(3^{2^n} - 2^{2^k}) \cdot (3^{2^n} + 2^{2^k}) \cdot (3^{2^{n+1}} + 2^{2^{k+1}}).$$

