4. Postęp arytmetyczny i geometryczny. Wartość bezwzględna, potęgowanie i pierwiastkowanie liczb rzeczywistych.

14 listopada 2009 r.

Uwaga: Przyjmujemy, że postęp geometryczny ma wszystkie wyrazy różne od zera.

56. Obliczyć sumę postępu geometrycznego

$$1+3+9+27+\ldots+3^n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na sumę postępu geometrycznego

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

otrzymujemy

$$1+3+9+27+\ldots+3^n=1\cdot\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}<\frac{3^n}{2}\,.$$

Jak to możliwe, że suma liczb dodatnich jest mniejsza od połowy jednego ze składników?

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 77.

57. Obliczyć sumę postępu arytmetycznego

$$223+228+233+\ldots+778\,.$$

Rozwiązanie:
Skorzystamy ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\,,$$

jednak najpierw musimy ustalić liczbę wyrazów postępu.

Ze wzoru $a_n=a_1+(n-1)r$, gdzie r jest różnicą postępu, otrzymujemy wzór

$$n=\frac{a_n-a_1}{r}+1\,,$$

który pozwala wyznaczyć liczbę wyrazów postępu arytmetycznego, gdy znane są wyrazy pierwszy i ostatni oraz różnica postępu.

Wstawiając dane z zadania otrzymujemy

$$n=\frac{778-223}{5}+1=\frac{555}{5}+1=111+1=112\,,$$

skąd szukana suma jest równa

$$\frac{223+778}{2}\cdot 112=\frac{1001}{2}\cdot 112=1001\cdot 56=56056\,.$$

58. Pierwszy, czwarty i dziesiąty wyraz postępu arytmetycznego tworzą (z zachowaniem kolejności) postęp geometryczny trójwyrazowy. Wyznaczyć iloraz tego postępu geometrycznego.

Rozwiązanie:
Stosując standardowe oznaczenia otrzymujemy

$$a_4=a_1+3r$$

oraz

$$a_{10}=a_1+9r\,.$$

Wyrazy a_1, a_4, a_{10} tworzą postęp geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_4^2=a_1\cdot a_{10}\,,$$

co możemy kolejno przekształcić jako

$$(a_1+3r)^2=a_1\cdot(a_1+9r)$$

$$a_1^2+6ra_1+9r^2=a_1^2+9ra_1$$

$$9r^2=3ra_1\,,$$

a to po obustronnym podzieleniu przez $3r$ daje

$$a_1=3r\,.$$

Stąd postęp geometryczny ma postać

$$a_1=3r,\quad a_4=6r,\quad a_{10}=12r\,,$$

zatem jego iloraz jest równy **2.**

Zwróćmy uwagę, że warunki zadania nie wyznaczają jednoznacznie postępu arytmetycznego, ustalają jednak proporcję między pierwszym wyrazem postępu arytmrtycznego i jego różnicą.

Odpowiedź: Iloraz postępu geometrycznego jest równy 2.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 77.

59. Wyznaczyć pierwszy wyraz postępu arytmetycznego z poprzedniego zadania, jeśli wiadomo ponadto, że jego siódmy wyraz jest równy 21.

Rozwiązanie:
Skoro

$$a_7=a_1+6r=3r+6r=9r\,,$$

to

$$a_1=3r=\frac{a_7}{3}=\frac{21}{3}=7\,.$$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz postępu arytmetycznego jest równy 7.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 77.

60. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie arytmetycznym n-wyrazowym o sumie 0, co najmniej jeden z wyrazów jest równy 0.

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Dla n nieparzystych.

Suma postępu arytmetycznego o **nieparzystej** liczbie wyrazów jest równa środkowemu wyrazowi pomnożonemu przez liczbę wyrazów. Przy standardowych oznaczeniach

$$S_n=a_{\frac{n+1}{2}}\cdot n\,.$$

Suma postępu arytmetycznego jest więc zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jego środkowy wyraz jest zerem.

Gdy liczba wyrazów postępu jest **parzysta**, postęp nie ma środkowego wyrazu i bez trudu konstruujemy postępy o sumie 0, które mają wszystkie wyrazy różne od zera:

$$-3,\ -1,\ 1,\ 3$$

$$-5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5$$

$$-7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7$$

i ogólnie dla dowolnego n parzystego otrzymujemy postęp n-wyrazowy

$$-n+1,\ \dots,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots,\ n-1\,.$$

61. Ułożyć sensowną wersję poprzedniego zadania dla postępów geometrycznych.

Rozwiązanie:

Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie?
W dowolnym postępie **geometrycznym** n-wyrazowym o **iloczynie wyrazów równym 1**, co najmniej jeden z wyrazów jest równy **1**.

Odpowiedź: Dla n nieparzystych.

Iloczyn wyrazów postępu geometrycznego o **nieparzystej** liczbie wyrazów jest równy środkowemu wyrazowi podniesionemu do potęgi będącej liczbą wyrazów postępu. Wzór na iloczyn wyrazów postępu geometrycznego o nieparzystej liczbie wyrazów przyjmuje więc postać

$$I_n=a_{\frac{n+1}{2}}^n\,.$$

Zatem iloczyn wyrazów postępu geometrycznego jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jego środkowy wyraz jest równy 1.

Gdy liczba wyrazów postępu jest **parzysta**, postęp nie ma środkowego wyrazu i bez trudu konstruujemy postępy o iloczynie 1, które mają wszystkie wyrazy różne od jeden, w sposób analogiczny do konstrukcji z poprzedniego zadania.

Dla n parzystego mamy następujący przykład postępu n-wyrazowego

$$\frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots,\ \frac{1}{128},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 8,\ 32,\ 127,\ \ldots,\ 2^{n-1}\,.$$

62. Podać wzór na iloczyn wyrazów postępu geometrycznego.

Odpowiedź:

$$I_n=\begin{cases} a^n_{\frac{n+1}{2}} & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\\ (a_1a_n)^{n/2} & \text{dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$$

Należy zwrócić uwagę, że w odróżnieniu od analogicznego wzoru za sumę postępu arytmetycznego, nie można tu podać jednolitego wzoru dla wszystkich n, niezależnie od ich parzystości.

Dla n parzystych, postęp nie ma środkowego wyrazu.

Z kolei dla n nieparzystych skrajne wyrazy nie "pamiętają" całego postępu. Przykładem są tu dwa postępy geometryczne

$$1,\ \ 2,\ \ 4$$

oraz

$$1,\ \ -2,\ \ 4\,,$$

w których skrajne wyrazy są odpowiednio równe, ale iloczyny wyrazów już nie.

63. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ dowolny postęp geometryczny n-wyrazowy ma dodatni iloczyn wyrazów?

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Dla n podzielnych przez 4.

Korzystając ze wzorów podanych w poprzednim zadaniu widzimy, że

1° Gdy n jest nieparzyste, iloczyn postępu geometrycznego n-wyrazowego ma taki sam znak jak jego środkowy wyraz. Jednak ten wyraz może być zarówno ujemny jak i dodatni, tak więc i iloczyn może mieć dowolny znak. Bez trudu można wypisać odpowiednie przykłady. Postęp o ujemnym wyrazie środkowym ma iloczyn ujemny.

2° Gdy n jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4 (a więc liczba $n/2$ jest nieparzysta), znak iloczynu wszystkich wyrazów postępu jest taki sam jak znak iloczynu wyrazów skrajnych a_1a_n, a ten znak jest taki sam jak znak ilorazu postępu geometrycznego (wypisz odpowiednie wzory). Tak więc w tym wypadku postęp o ujemnym ilorazie ma ujemny iloczyn wyrazów.

3° Gdy liczba wyrazów n jest podzielna przez 4, liczba $n/2$ jest parzysta, a w konsekwencji wzór $(a_1a_n)^{n/2}$ zawsze daje liczbę dodatnią.

64. Dla których liczb naturalnych $n \geqslant 3$ istnieje postęp arytmetyczny n-wyrazowy o sumie n i jednym z wyrazów równym n ?

Odpowiedź: Dla wszystkich.

Takim postępem jest np. postęp arytmetyczny o pierwszym wyrazie n i różnicy -2:

$$a_k = n-2(k-1)$$

lub

$$n,\ n-2,\ n-4,\ n-6,\ \ldots,\ -n+4,\ -n+2\,.$$

65. Dla których liczb naturalnych n podany wzór jest poprawnym wzorem na sumę n-wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

a) $S_n = \dfrac{a_7+a_8+a_{12}}{3}\cdot n$

b) $S_n = \dfrac{3a_{11}+a_{17}}{4}\cdot n$

c) $S_n = \dfrac{a_7+a_8+a_n}{3}\cdot n$

d) $S_n = \dfrac{a_4+a_7+a_{n-9}+a_n}{4}\cdot n$

Rozwiązanie:

Wzór na k-ty wyraz postępu arytmetycznego może być zapisany w postaci

$$a_k = a_1 - r + kr\,,$$

skąd wynika, że

$$\frac{a_x+a_y+a_z}{3} = \frac{a_1-r+xr+a_1-r+yr+a_1-r+zr}{3} = a_1-r+\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\cdot r$$

i analogicznie dla innej niż 3 liczby wyrazów postępu.

To prowadzi do następującego wniosku:

Średnia arytmetyczna kilku dowolnych wyrazów ustalonego postępu arytmetycznego zależy tylko od średniej arytmetycznej ich indeksów w sposób opisany powyższym wzorem.

Biorąc pod uwagę wzór na sumę postępu arytmetycznego w postaci

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

poprawność podanych wzorów sprowadza się do następujących równości:

a)

$$\frac{7+8+12}{3} = \frac{n+1}{2}$$

$$9=\frac{n+1}{2}$$
$$n=17$$

b)

$$\frac{3\cdot 11+17}{4}=\frac{n+1}{2}$$
$$\frac{50}{4}=\frac{n+1}{2}$$
$$n=24$$

c)

$$\frac{7+8+n}{3}=\frac{n+1}{2}$$
$$5+\frac{n}{3}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$$
$$4.5=\frac{n}{6}$$
$$n=27$$

d)

$$\frac{4+7+n-9+n}{4}=\frac{n+1}{2}$$
$$\frac{2n+2}{4}=\frac{n+1}{2}$$
$$\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

Zatem wzór jest spełniony dla dowolnego n, powinniśmy jednak założyć $n\geqslant 10$, aby postęp zawierał wyraz o numerze $n-9$.

66. Dobrać takie liczby A, B (być może zależne od n), aby otrzymać wzór na sumę n-wyrazowego postępu arytmetycznego $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

a) $S_n=Aa_1+Ba_2 \quad (n\geqslant 3)$

b) $S_n=Aa_3+Ba_7 \quad (n\geqslant 7)$

Rozwiązanie:

a) Obliczamy różnicę postępu $r=a_2-a_1$ oraz ostatni wyraz

$$a_n=a_1+(n-1)r=a_1+(n-1)(a_2-a_1)=(2-n)a_1+(n-1)a_2\,,$$

skąd

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{(3-n)a_1+(n-1)a_2}{2}\cdot n=\frac{n\cdot(3-n)}{2}\cdot a_1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a_2\,.$$

Zatem wystarczy przyjąć

$$A=\frac{n\cdot(3-n)}{2}$$

$$B=\frac{n\cdot(n-1)}{2}\,.$$

Zwróćmy uwagę, że obie liczby A, B są całkowite dla dowolnego n.

b) Obliczamy różnicę postępu $r=(a_7-a_3)/4$ oraz pierwszy i ostatni wyraz

$$a_1=a_3-2r=a_3-\frac{a_7-a_3}{2}=\frac{3a_3-a_7}{2}$$

$$a_n=a_1+(n-1)r==\frac{3a_3-a_7}{2}+(n-1)\frac{a_7-a_3}{4}=\frac{6a_3-2a_7}{4}+\frac{(n-1)a_7-(n-1)a_3}{4}=$$

$$=\frac{(7-n)a_3+(n-3)a_7}{4}\,,$$

skąd

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{(13-n)a_3+(n-5)a_7}{4}\cdot n=\frac{n\cdot(13-n)}{4}\cdot a_3+\frac{n\cdot(n-5)}{4}\cdot a_7\,.$$

Zatem wystarczy przyjąć

$$A=\frac{n\cdot(13-n)}{4}$$

$$B=\frac{n\cdot(n-5)}{4}\,.$$

67. Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{n-40\sqrt{n}+400}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia otrzymujemy

$$\sqrt{n-40\sqrt{n}+400}=\sqrt{(\sqrt{n}-20)^2}=\sqrt{n}-20\,.$$

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 77.

68. Rozwiązać równanie

$$|x-5|+|x+7|=12\,.$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy równanie w postaci

$$|x-5|+|x-(-7)|=12$$

i korzystamy z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb rzeczywistych: $|a-b|$ jest odległością liczb a oraz b na osi liczbowej.

Zatem geometryczny sens danego w zadaniu równania jest następujący:

Dla których liczb rzeczywistych x suma odległości liczby x od liczb 5 i -7 jest równa 12 ?

Biorąc po uwagę, że liczby 5 i -7 są odległe właśnie o 12, powyższy warunek jest spełniony przez liczby x nalżące do przedziału $[-7,5]$.

69. Która z liczb jest większa

a) $\dfrac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\dfrac{16^{333}}{19^{17}}$?

b) $\dfrac{17^{667}}{3333^4+6666^4}$ czy $\dfrac{17^{666}}{3333^4}$?

Rozwiązanie:

a) Wobec równości

$$8^{444}=\left(8^4\right)^{111}=\left(2^{12}\right)^{111}=\left(16^3\right)^{111}=16^{333}$$

widzimy, że liczniki obu ułamków są równe. Większy jest więc ułamek o mniejszym mianowniku:

$$\frac{8^{444}}{17^{17}}>\frac{16^{333}}{19^{17}}$$

b) Z równości

$$3333^4+6666^4=3333^4+(2\cdot 3333)^4=3333^4+2^4\cdot 3333^4=17\cdot 3333^4$$

wynika, że podane liczby są równe.

70. Podać co najmniej trzy przykłady par takich liczb wymiernych dodatnich $a<b$, że $a^b=b^a$.

Odpowiedź: $a=2$, $b=4$

$$a=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4},\qquad b=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$$
$$a=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27},\qquad b=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{256}{81}$$

Uwaga: Zgodnie z obowiązującą konwencją, w napisie typu a^{b^c} potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn.

$$a^{b^c}=a^{\left(b^c\right)}\ .$$

71. Uprościć wyrażenie

$$\left(3^{2^n}-2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^n}+2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\left(3^{2^n}-2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^n}+2^{2^k}\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right)=\left(\left(3^{2^n}\right)^2-\left(2^{2^k}\right)^2\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right)=$$

$$=\left(3^{2^{n}\cdot 2}-2^{2^{k}\cdot 2}\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right)=\left(3^{2^{n+1}}-2^{2^{k+1}}\right)\cdot\left(3^{2^{n+1}}+2^{2^{k+1}}\right)=\left(3^{2^{n+2}}-2^{2^{k+2}}\right).$$

72. Niech $a=\sqrt[4]{2}$. Która z liczb jest większa

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}} \qquad \text{czy} \qquad 10^{10^{10}}\ ?$$

Pomoc dla osób dostających oczopląsu: liczba a występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Rozwiązanie:

Z równości $a^{16}=16$ wynika

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}=a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}=\ldots=a^{a^{a^{16}}}=a^{a^{16}}=a^{16}=16\,.$$

Zatem większa jest druga z podanych liczb.

73. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu .... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $a_1+7, a_2+7, \ldots, a_n+7$ jest postępem ....

Odpowiedź: arytmetycznego, arytmetycznym

74. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu .... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $7a_1, 7a_2, \ldots, 7a_n$ jest postępem ....

Odpowiedź: Zadanie ma dwa rozwiązania.

I. arytmetycznego, arytmetycznym

II. geometrycznego, geometrycznym

75. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu .... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $a_1^7, a_2^7, \ldots, a_n^7$ jest postępem ....

Odpowiedź: geometrycznego, geometrycznym

76. Uzupełnić zdanie: Dla dowolnego postępu .... $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ciąg $7^{a_1}, 7^{a_2}, \ldots, 7^{a_n}$ jest postępem ....

Odpowiedź: arytmetycznego, geometrycznym

77. Uporządkować następujące liczby w kolejności rosnącej

$$a=\left(5-\sqrt{37}\right)^{2008}$$

$$b=\left(6-\sqrt{37}\right)^{2009}$$

$$c=\left(7-\sqrt{73}\right)^{2011}$$

$$d=\left(9-\sqrt{73}\right)^{2013}$$

Rozwiązanie:

Z nierówności

$$6<\sqrt{37}<7$$

wynika

$$5-\sqrt{37}<-1$$

oraz

$$-1<6-\sqrt{37}<0\,,$$

skąd odpowiednio

$$a>1$$

oraz

$$-1<b<0\,.$$

Podobnie, nierówność

$$8<\sqrt{73}<9$$

prowadzi do

$$7-\sqrt{73}<-1$$

oraz

$$0<9-\sqrt{73}<1\,,$$

co daje

$$c<-1$$

oraz

$$0<d<1\,.$$

Zatem po uporządkowaniu w kolejności rosnącej otrzymujemy

$$c,\ b,\ d,\ a\,.$$

Wyjaśnienie błędów w niektórych rozwiązaniach.

56. We wzorze na sumę postępu geometrycznego

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

n jest liczbą wyrazów postępu. Tę liczbę trzeba jakoś ustalić. W zadaniu występuje n, ale jest to tylko pewien parametr, który nie musi (i w tym wypadku nie jest !!!) liczbą składników podanej sumy.

Faktyczna liczba wyrazów postępu jest równa $n+1$, a szukana suma jest równa

$$1 \cdot \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2} \,.$$

58,59. W zasadzie na lekcjach matematyki nie uczy się wierszy, jednak tu akurat trzeba sobie przypomnieć pewien wierszyk z lekcji matematyki. Nie będziemy go tu cytować, przyjmując, że każdy go zna.

Równanie

$$9r^2 = 3ra_1$$

może być obustronnie podzielone przez $3r$ tylko wtedy, gdy $r \neq 0$. Przypadek $r=0$ trzeba albo jakoś wykluczyć, albo rozważyć osobno. Co oznacza $r=0$? Ano dokładnie tyle, że postęp arytmetyczny ma różnicę 0, czyli jest stały. Zwróćmy uwagę, że warunki zadania w żaden sposób nie wykluczają stałego postępu arytmetycznego. Co więcej, każdy stały postęp arytmetyczny o wyrazach różnych od zera warunki zadania spełnia w sposób oczywisty.

Gdybyśmy więc rozwiązywali zadanie uważnie, nie zgubilibyśmy przypadku $r=0$ i doszlibyśmy do warunku

$$a_1 = 3r \quad \text{lub} \quad r = 0 \,.$$

Uwzględniając ciąg stały, dostajemy następujące odpowiedzi:

Odpowiedź do zad. 58: Iloraz postępu geometrycznego jest równy **1 lub 2**.

Odpowiedź do zad. 59: Pierwszy wyraz postępu arytmetycznego jest równy **7 lub 21**.

67. Wyrażenie $\sqrt{x^2}$ jest równe x tylko dla x nieujemnych. Ogólnie mamy

$$\sqrt{x^2} = |x| \,,$$

zatem

$$\sqrt{n-40\sqrt{n}+400} = \left|\sqrt{n}-20\right| \,.$$

http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/