

**5. Logarytmy: definicja oraz podstawowe własności algebraiczne.**

28 listopada 2009 r.

**78.** Uprościć wyrażenia

- a)  $4^{2+\log_2 7}$
- b)  $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- c)  $\log_6 2 + \log_{36} 9$

**79.** Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

- a)  $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- b)  $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- c)  $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24$
- d)  $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

**80.** Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- a)  $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$
- b)  $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$
- c)  $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$
- d)  $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$

**81.** Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a)  $\log_2 7$  czy  $\log_3 7$
- b)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_{0,3} 7$
- c)  $\log_2 7$  czy  $\log_{0,3} 7$
- d)  $\log_{0,2} 7$  czy  $\log_3 7$
- e)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_3 0,7$
- f)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$
- g)  $\log_2 0,7$  czy  $\log_{0,3} 0,7$
- h)  $\log_{0,2} 0,7$  czy  $\log_3 0,7$
- i)  $\log_9 27$  czy  $\log_4 8$
- j)  $\log_3 8$  czy  $\log_2 5$
- k)  $\log_5 127$  czy  $\log_{10} 999$

- l)  $\log_3 100$  czy  $\log_2 10$   
 m)  $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$  czy  $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$   
 n)  $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$  czy  $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$   
 o)  $\log_2 3$  czy  $\log_3 5$   
 p)  $\log_3 7$  czy  $\log_5 19$   
 q)  $\log_2 3$  czy  $\log_5 13$   
 r)  $\log_3 5$  czy  $\log_{15} 56$   
 s)  $(\log_3 15) + \log_5 15$  czy  $(\log_3 15) \cdot \log_5 15$   
 t)  $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$  czy  $123456789^{\log_7 \log_7 123456789}$   
 u)  $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$  czy  $(\log_{666} 665) + \log_{666} 667$   
 v)  $\log_2 3$  czy  $1,6$   
 w)  $\log_2 45$  czy  $72/13$   
 x)  $2^{\log_3 7}$  czy  $7^{\log_3 2}$

**82.** Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

- a)  $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$   
 b)  $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$   
 c)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$   
 d)  $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$   
 e)  $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$   
 f)  $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$   
 g)  $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

**83.** Dla podanych liczb  $a, b$  wskazać taką liczbę  $c$ , że liczby

$$\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

- a)  $a = 64, b = 8$   
 b)  $a = 4, b = 8$   
 c)  $a = 2, b = 8$   
 d)  $a = 64, b = 16$

**6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (wstęp).**

84. Dowieść, że liczba  $\log_2 3$  jest niewymierna.

85. Dowieść, że liczba  $\log_{12} 18$  jest niewymierna.

86. Czy liczba  $0,(9) = 0,999999\dots$  jest wymierna czy niewymierna?

87. Niech

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + \dots = \\ &= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots) = 1 + 2x,\end{aligned}$$

skąd  $x = -1$ .

Jak to możliwe, że suma liczb dodatnich jest ujemna?

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>