

5. Logarytmy: definicja oraz podstawowe własności algebraiczne.

28 listopada 2009 r.

78. Uprościć wyrażenia

- a) $4^{2+\log_2 7}$
- b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- c) $\log_6 2 + \log_{36} 9$

79. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

- a) $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- b) $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
- c) $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24$
- d) $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

80. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

- a) $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$
- b) $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$
- c) $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$
- d) $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$

81. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

- a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$
- b) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- d) $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$
- e) $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- f) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- g) $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- h) $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
- j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
- k) $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$

- l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
 m) $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
 n) $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
 o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
 p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
 q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
 r) $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$
 s) $(\log_3 15) + \log_5 15$ czy $(\log_3 15) \cdot \log_5 15$
 t) $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$ czy $123456789^{\log_7 \log_7 123456789}$
 u) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$ czy $(\log_{666} 665) + \log_{666} 667$
 v) $\log_2 3$ czy $1,6$
 w) $\log_2 45$ czy $72/13$
 x) $2^{\log_3 7}$ czy $7^{\log_3 2}$

82. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?

- a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
 b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
 e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
 f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
 g) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$

83. Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c , że liczby

$$\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

- a) $a = 64, b = 8$
 b) $a = 4, b = 8$
 c) $a = 2, b = 8$
 d) $a = 64, b = 16$

6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (wstęp).

84. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

85. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

86. Czy liczba $0,(9) = 0,999999\dots$ jest wymierna czy niewymierna?

87. Niech

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$$

Wówczas

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 32 + \dots = \\ &= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots) = 1 + 2x, \end{aligned}$$

skąd $x = -1$.

Jak to możliwe, że suma liczb dodatnich jest ujemna?

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>