5. Logarytmy: definicja oraz podstawowe własności algebraiczne.

28 listopada 2009 r.

78. Uprościć wyrażenia

a) $4^{2+\log_2 7}$

b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$

c) $\log_6 2 + \log_{36} 9$

Rozwiązanie:

a) $4^{2+\log_2 7} = \left(2^2\right)^{\log_2 7 \cdot 4} = 28^2 = 784$

b) $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9 = \log_3 4 \cdot 2\log_5 3 = 2\log_5 4 = \log_5 16$ (można też podać ostateczny wynik w postaci $4\log_5 2$)

c) $\log_6 2 + \log_{36} 9 = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = 1$

79. Uprościć podane wyrażenia podając wynik w postaci liczby całkowitej

a) $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

b) $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

c) $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24$

d) $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

Odpowiedź:

a) 8

b) 11

c) 13

d) 14

80. Czy podane liczby tworzą (w podanej kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy

a) $\log_7 1$, $\log_7 3$, $\log_7 5$

b) $\log_7 1$, $\log_7 4$, $\log_7 16$

c) $\log_7 4$, $\log_7 6$, $\log_7 9$

d) $\log_7 25$, $\log_7 10$, $\log_7 4$

Odpowiedź: Liczby $\log_7 a$, $\log_7 b$, $\log_7 c$ tworzą postęp arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c tworzą postęp geometryczny, czyli $ac = b^2$.

Zatem odpowiedzi to kolejno: NIE, TAK, TAK, TAK.

81. Bez użycia kalkulatora rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

a) $\log_2 7$ czy $\log_3 7$

b) $\log_{0,2}7$ czy $\log_{0,3}7$
c) $\log_2 7$ czy $\log_{0,3}7$
d) $\log_{0,2}7$ czy $\log_3 7$
e) $\log_2 0{,}7$ czy $\log_3 0{,}7$
f) $\log_{0,2}0{,}7$ czy $\log_{0,3}0{,}7$
g) $\log_2 0{,}7$ czy $\log_{0,3}0{,}7$
h) $\log_{0,2}0{,}7$ czy $\log_3 0{,}7$
i) $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
j) $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
k) $\log_5 127$ czy $\log_{10}999$
l) $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
m) $(\log_2 3)\cdot\log_5 7$ czy $(\log_2 7)\cdot\log_5 3$
n) $(\log_2 3)\cdot\log_7 5$ czy $(\log_7 9)\cdot\log_{16}25$
o) $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
p) $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
q) $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
r) $\log_3 5$ czy $\log_{15}56$
s) $(\log_3 15)+\log_5 15$ czy $(\log_3 15)\cdot\log_5 15$
t) $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$ czy $123456789^{\log_7\log_7 123456789}$
u) $\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}2$ czy $(\log_{666}665)+\log_{666}667$
v) $\log_2 3$ czy $1{,}6$
w) $\log_2 45$ czy $72/13$
x) $2^{\log_3 7}$ czy $7^{\log_3 2}$

Odpowiedź:

a) $\log_2 7>\log_3 7$
b) $\log_{0,2}7>\log_{0,3}7$
c) $\log_2 7>\log_{0,3}7$
d) $\log_{0,2}7<\log_3 7$
e) $\log_2 0{,}7<\log_3 0{,}7$
f) $\log_{0,2}0{,}7<\log_{0,3}0{,}7$
g) $\log_2 0{,}7<\log_{0,3}0{,}7$
h) $\log_{0,2}0{,}7>\log_3 0{,}7$
i) $\log_9 27=3/2=\log_4 8$
j) $\log_3 8<2<\log_2 5$
k) $\log_5 127>3>\log_{10}999$
l) $\log_3 100>\log_2 10$
m) $(\log_2 3)\cdot\log_5 7=(\log_2 7)\cdot\log_5 3$

n) $(\log_2 3)\cdot\log_7 5=(\log_7 9)\cdot\log_{16} 25$
o) $\log_2 3=\log_8 27>\log_9 25=\log_3 5$
p) $\log_3 7=\log_{27} 343<\log_{25} 361=\log_5 19$
q) $\log_2 3=\log_{128} 2187<\log_{125} 2197=\log_5 13$
r) $\log_3 5=\log_{243} 3125<\log_{225} 3136=\log_{15} 56$
s) $(\log_3 15)+\log_5 15=(\log_3 15)\cdot\log_5 15$
t) $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}=123456789^{\log_7\log_7 123456789}$
u) $\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}} 2=2$
$(\log_{666} 665)+\log_{666} 667=\log_{666}(666^2-1)<2$
v) $\log_2 3=\log_{32} 243<\log_{32} 256=1{,}6$
w) $\log_2 45<72/13$

Powyższa nierówność sprowadza się do nierówności

$$45^{13}=3^{26}\cdot 5^{13}<2^{72}\,,$$

którą otrzymujemy z wymnożenia następujących nierówności

$$125^4=5^{12}<2^{28}=127^4$$

$$243^5=3^{25}<2^{40}=256^5$$

$$15=3\cdot 5<2^4=<16$$

x) $2^{\log_3 7}=7^{\log_3 2}$

82. Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?
a) $\log_a(bc)=(\log_a b)+\log_a c$
b) $\log_a(bc)=(\log_a b)\cdot\log_a c$
c) $\log_a(b+c)=(\log_a b)\cdot\log_a c$
d) $\log_a(b+c)=(\log_a b)+\log_a c$
e) $(\log_a b)\cdot\log_b c=\log_a c$
f) $\log_a(b^c)=c\cdot\log_a b$
g) $\log_a(b^c)=(\log_a b)^c$

Rozwiązanie:
a) Dla wszystkich, to jest ogólnie znany wzór.
b) Równość jest równoważna warunkowi

$$(\log_a b)+\log_a c=(\log_a b)\cdot\log_a c\,.$$

Pamiętając, że równość $x+y=xy$ jest równoważna łatwo rozwiązywalnej równości

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

konstruujemy bardzo wiele przykładów dobranych tak, aby $x=\log_a b$ oraz $y=\log_a c$.

Przy $x=y=2$ możemy wziąć dowolne a oraz $b=c=a^2$.

Przy $x=3$, $y=3/2$ mamy np. $a=4$, $b=64$, $c=8$.

Przy $x=4$, $y=4/3$ mamy przy dowolnym n: $a=n^3$, $b=n^{12}$, $c=n^4$.

c) Biorąc np. $a=b=c=2$ widzimy, że podana równość nie jest ogólnie prawdziwa. Aby skonstruować przykłady, dla których podany wzór zachodzi, ograniczmy się do przypadku $b=c$, dzięki czemu będzie łatwiej kontrolować wielkości występujące we wzorze. Przypuśćmy, że

$$\log_a b=\log_a c=n\,,$$

co ma miejsce przy $b=c=a^n$. Wówczas wzór jest spełniony, gdy

$$\log_a(b+c)=\log_a(2a^n)=n^2\,,$$

co prowadzi kolejno do

$$2a^n=a^{n^2}$$

$$a=\sqrt[n(n-1)]{2}\,.$$

To prowadzi do następujących przykładów:

$n=2$, $a=\sqrt{2}$, $b=c=2$

$n=3$, $a=\sqrt[6]{2}$, $b=c=\sqrt{2}$

$n=-1$, $a=\sqrt{2}$, $b=c=1/\sqrt{2}$

$n=1/2$, $a=1/16$, $b=c=1/4$

d) Wzór jest równoważny równości $b+c=bc$, którą przeanalizowaliśmy w podpunkcie **b)**. Przykłady:

a dowolne, $b=c=2$,

a dowolne, $b=3$, $c=3/2$.

a dowolne, $b=10$, $c=10/9$.

e) Dla wszystkich, to jest ogólnie znany wzór.

f) Dla wszystkich, to jest ogólnie znany wzór.

g) Przyjmując $x=\log_a b$ sprowadzamy podaną równość do postaci

$$cx=x^c\,,$$

co po przekształceniu daje kolejno

$$c=x^{c-1}$$

$$x=c^{1/(c-1)}\,.$$

Powyższe operacje nie budzą wątpliwości przy x dodatnim, więc możemy ograniczyć nasze rozważania do tego przypadku. Pamiętajmy też, że zgodnie z założeniami w treści zadania $c\neq 1$.

Teraz możemy konstruować przykłady:

$c=2$, $x=2$, a dowolne, $b=a^2$

$c=1/2$, $x=4$, a dowolne, $b=a^4$

$c=3/2$, $x=9/4$, $a=16$, $b=512$

$c=2/3$, $x=27/8$, $a=256$, $b=2^{27}$

Zwróćmy też uwagę, że wyrażenie $(\log_a b)^c$ może być nieokreślone w przypadku, gdy $\log_a b$ jest liczbą ujemną, a przy tym c jest liczbą niewymierną lub wymierną o parzystym mianowniku.

83. Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c, że liczby

$$\log_a 37,\ \ \log_b 37,\ \ \log_c 37$$

tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.

a) $a=64$, $b=8$

b) $a=4$, $b=8$

c) $a=2$, $b=8$

d) $a=64$, $b=16$

Rozwiązanie:

Niech $a=2^i$, $b=2^j$, $c=2^k$. Wtedy liczby

$$\log_a 37=\frac{\log_2 37}{i}$$

$$\log_b 37=\frac{\log_2 37}{j}$$

$$\log_c 37=\frac{\log_2 37}{k}$$

tworzą postęp arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{k}=\frac{2}{j}\,,$$

czyli

$$\frac{1}{k}=\frac{2}{j}-\frac{1}{i}\,.$$

Po tych rozważaniach możemy przejść do poszczególnych podpunktów:

a) $i=6$, $j=3$, $1/k=2/3-1/6=1/2$, skąd $k=2$ i $c=4$

b) tu od razu odpowiadamy $c=64$, bo jest to ten sam ciąg, co w podpunkcie **a)**, tylko zapisany w odwrotnej kolejności.

c) $i=1$, $j=3$, $1/k=2/3-1=-1/3$, skąd $k=-3$ i $c=1/8$
d) $i=6$, $j=4$, $1/k=2/4-1/6=1/3$, skąd $k=3$ i $c=8$

6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (wstęp).

84. Dowieść, że liczba $\log_2 3$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_2 3$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wowczas otrzymujemy kolejno

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

$$2^{m/n} = 3$$

$$2^m = 3^n\,.$$

Ta ostatnia równość nie jest jednak możliwa, gdyż liczba 2^m jest parzysta, a liczba 3^n nieparzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_2 3$ nie jest liczbą wymierną.

85. Dowieść, że liczba $\log_{12} 18$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:
Rozumując analogicznie jak w poprzednim zadaniu dochodzimy do równości

$$12^m = 18^n\,,$$

czyli

$$2^{2m}\cdot 3^m = 2^n \cdot 3^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że po obu stronach ostatniej równości znajduje się ten sam rozkład na potęgi czynników pierwszych. Mamy więc

$$2m = n \quad \text{oraz} \quad m = 2n\,,$$

co prowadzi do $m=n=0$. Zatem równanie $12^m = 18^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

86. Czy liczba $0,(9) = 0{,}999999\ldots$ jest wymierna czy niewymierna?

Rozwiązanie:
Podana liczba jest wymierna i jest równa 1. Oto dowód:

Oznaczmy

$$x=0{,}9999999\ldots$$

Wówczas

$$10x=9{,}9999999\ldots$$

co po odjęciu stronami pierwszego równania od drugiego daje

$$9x=9\,,$$

skąd $x=1$.

87. Niech

$$x=1+2+4+8+16+32+\ldots$$

Wówczas

$$x=1+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 8+2\cdot 16+2\cdot 32+\ldots=$$

$$=1+2\cdot(1+2+4+8+16+32+\ldots)=1+2x\,,$$

skąd $x=-1$.

Jak to możliwe, że suma liczb dodatnich jest ujemna?

Rozwiązanie:

Całe rozumowanie opiera się na **błędnym** założeniu, że napis

$$1+2+4+8+16+32+\ldots$$

reprezentuje jakąś liczbę rzeczywistą. Tymczasem suma potęg dwójki, liczb nieskończenie wielu i to coraz większych, jest nieskończona. Nie poddaje się więc takim samym manipulacjom algebraicznym jak liczby rzeczywiste.

To może zachwiać wiarę w poprawność rozwiązania zadania **86**. I w istocie w tym rozwiązaniu jest pewne niedomówienie. Otóż z ogólnej teorii (nieelementarnej, bo odwołującej się do pojęcia granicy ciągu liczbowego oraz zbieżności szeregu) wynika, że każde rozwinięcie dziesiętne reprezentuje jakąś liczbę rzeczywistą. To upoważnia nas do oznaczenia szukanej liczby przez x i poddania jej algebraicznym przekształceniom.