6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (c.d.).

12 grudnia 2009 r.

88. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3,374(9)}$

b) $(0,2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

c) $(0,(037))^{0,(3)}$

89. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m-tą potęgą liczby naturalnej

c) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$

f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m,n>1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

90. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3+\log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

Oszustwo **91.**

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie I:

Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

OSZUSTWO **92.**

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna.

ROZWIĄZANIE:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$$

$$w-\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2-2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(-w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w-1$ otrzymujemy

$$-2\sqrt{2}+w+1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

W powyższym rozwiązaniu wykonujemy dzielenie przez $w-1$, co jest dozwolone pod warunkiem, że $w-1$ jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna lub równa 1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=-\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=\left(-\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$3-\sqrt{8}=2-2\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=3-\sqrt{8}\,,$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa 1, czyli jest liczbą wymierną.

Jak to jednak możliwe, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,,$$

skoro po lewej stronie występuje liczba większa od $\sqrt{2}$, a więc tym bardziej większa od 1?

93. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

94. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

95. Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

96. Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

97. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

98. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

99. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

100. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+e$, $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

101. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

102. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

103. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

104. Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach.

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

a) $0<x<1$ oraz liczba x jest niewymierna,
b) $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x+\dfrac{1}{x}$ jest wymierna,
g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,
h) 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,
i) 2^x+3^x jest liczbą wymierną,
j) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
k) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

l) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
m) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
n) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
o) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
p) $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.