6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (c.d.).

12 grudnia 2009 r.

88. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3{,}374(9)}$

b) $(0{,}2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)$

c) $(0,(037))^{0,(3)}$

Odpowiedź:

a) $\sqrt{0,(4)}+\sqrt[3]{3{,}374(9)}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}+\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{6}$

b) $(0{,}2(9)+1,(09))\cdot 12,(2)=\left(\dfrac{3}{10}+\dfrac{12}{11}\right)\cdot\dfrac{110}{9}=(3\cdot 11+12\cdot 10)\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{153}{9}=17$

c) $(0,(037))^{0,(3)}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{1/3}=\dfrac{1}{3}$

89. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m-tą potęgą liczby naturalnej

c) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$

f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m,n>1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

Rozwiązanie:

a) $\sqrt{2}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu **względnie pierwszych** liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wowczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$$
$$2=\frac{m^2}{n^2}$$
$$2n^2=m^2\ .$$

Stąd wynika, że liczba m^2 jest parzysta, a co za tym idzie, liczba m jest parzysta. Podstawiając $m=2k$ otrzymujemy

$$2n^2=(2k)^2$$
$$n^2=2k^2\ ,$$

co z kolei prowadzi do wniosku, że liczba n jest parzysta.

Zatem obie liczby m, n są parzyste, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczby te są względnie pierwsze. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Zwróćmy uwagę, że w tym dowodzie nie wykorzystywaliśmy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, a jedynie skorzystaliśmy z faktu, że liczba naturalna i jej kwadrat mają tę samą parzystość.

b) $\sqrt[m]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m-tą potęgą liczby naturalnej

Załóżmy, że liczba $\sqrt[m]{n}$ jest wymierna i niech a/b będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych. Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[m]{n}=\frac{a}{b}$$

$$n=\frac{a^m}{b^m}$$

$$n\cdot b^m=a^m\,.$$

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Niech i, j, k będą odpowiednio wykładnikami (być może równymi 0), z jakimi p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczb n, b, a. Wówczas, na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$i+mj=mk\,,$$

skąd wynika, że liczba i jest podzielna przez m.

To oznacza, że w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze każdy czynnik pierwszy występuje w wykładniku podzielnym przez m, a w konsekwencji liczba n jest m-tą potęgą liczby naturalnej.

Udowodniliśmy więc, że liczba $\sqrt[m]{n}$ jest wymierna tylko wtedy, gdy jest całkowita. Innymi słowy, jest to liczba niewymierna, wyjąwszy przypadki, gdy pierwiastkowanie daje się wykonać w zbiorze liczb naturalnych jak np. $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[6]{64}=2$, $\sqrt[4]{4096}=8$.

c) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w.

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}=w$$

$$5+2\sqrt{35}+7=w^2$$

$$\sqrt{35}=\frac{w^2-12}{2}\,,$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w.

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}=w$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}=w-\sqrt{3}$$

$$5+2\sqrt{35}+7=w^2-2w\sqrt{3}+3$$

$$2\sqrt{35}+2w\sqrt{3}=w^2-9$$

$$140+8w\sqrt{105}+12w^2=\left(w^2-9\right)^2$$

$$\sqrt{105}=\frac{(w^2-9)^2-140-12w^2}{8w},$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

e) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w.

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}=w$$

$$2+3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}+3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}+3=w^3$$

$$2+3w\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}+3=w^3$$

$$3w\cdot\sqrt[3]{6}=w^3-5$$

$$\sqrt[3]{6}=\frac{w^3-5}{3w},$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m,n>1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

Załóżmy, że liczba $\log_m n$ jest wymierna i niech a/b będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu **względnie pierwszych** liczb naturalnych. Wowczas otrzymujemy kolejno

$$\log_m n=\frac{a}{b}$$

$$m^{a/b}=n$$

$$m^a=n^b.$$

Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Niech i, j będą odpowiednio wykładnikami (być może równymi 0), z jakimi p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczb m, n. Wówczas, na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$ai = bj\ ,$$

skąd wobec założenia, że liczby a, b są względnie pierwsze, wynika, że liczba i jest podzielna przez b.

To oznacza, że w rozkładzie liczby m na czynniki pierwsze każdy czynnik pierwszy występuje w wykładniku podzielnym przez b, a w konsekwencji liczba m jest b-tą potęgą liczby naturalnej, którą oznaczymy przez k. Zatem

$$m = k^b$$

oraz

$$n^b = m^a = k^{ab}\ ,$$

skąd

$$n = k^a\ .$$

Udowodniliśmy więc, że jeżeli liczba $\log_m n$ jest wymierna, to liczby m, n są potęgami tej samej liczby naturalnej.

Można to wysłowić w sposób może mało precyzyjny, ale za to przemawiający do wyobraźni:
Jeżeli logarytmowanie $\log_m n$ nie daje się łatwo wykonać, jak np. $\log_4 8 = 3/2$, $\log_{32} 128 = 7/5$, $\log_{243} 27 = 3/5$, to liczba $\log_m n$ jest niewymierna.

90. Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:
Z równości

$$\log_2 3 + \log_4 5 = \log_4 9 + \log_4 5 = \log_4 45$$

wynika, że podana liczba jest niewymierna.

Oszustwo **91.**
Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.
Rozwiązanie I:
Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

Rozwiązanie II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w+\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2+2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2}+w-1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

Rozwiązanie:

Rozwiązanie I jest błędne, gdyż powołuje się na twierdzenie: *suma liczb niewymiernych jest niewymierna*, które nie jest ogólnie prawdziwe, np. z równości

$$\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$$

wynika, że suma dwóch liczb niewymiernych może być wymierna.

W Rozwiązaniu II wykonujemy dzielenie przez $w+1$, co jest dozwolone pod warunkiem, że $w+1$ jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna lub równa -1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}=-1\,.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{2}-1$$

$$3-\sqrt{8}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$3-\sqrt{8}=2-2\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=3-\sqrt{8}\,,$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa -1, czyli jest liczbą wymierną.

OSZUSTWO **92.**

ZADANIE: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna.

ROZWIĄZANIE:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w=\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$$

$$w-\sqrt{2}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2-2\sqrt{2}w+2=3-2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(-w+1)+(w-1)(w+1)=0$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w-1$ otrzymujemy

$$-2\sqrt{2}+w+1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

W powyższym rozwiązaniu wykonujemy dzielenie przez $w-1$, co jest dozwolone pod warunkiem, że $w-1$ jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$ jest niewymierna lub równa 1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=-\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=\left(-\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$3-\sqrt{8}=2-2\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8}=3-\sqrt{8}\,,$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa 1, czyli jest liczbą wymierną.

Jak to jednak możliwe, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1\,,$$

skoro po lewej stronie występuje liczba większa od $\sqrt{2}$, a więc tym bardziej większa od 1?

Rozwiązanie:

Podana liczba jest jednak niewymierna. Błąd polegał na podniesieniu stronami do kwadratu równości

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=-\sqrt{2}+1\,,$$

w której lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna.

Zauważmy, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1\,,$$

skąd

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1\,.$$

93. Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b$ jest niewymierna?

Odpowiedź: **Nie**, np.

$$\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)=2\,.$$

94. Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$ jest wymierna czy niewymierna?

Odpowiedź: Wobec równości

$$(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=1$$

dana w zadaniu liczba jest równa -1, jest więc wymierna.

95. Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź: Gdyby suma liczby wymiernej w oraz liczby niewymiernej n była równa liczbie wymiernej w_2, otrzymalibyśmy

$$n=w_2-w\,,$$

a przecież liczba po prawej stronie jest wymierna.

96. Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

Odpowiedź: Nie, np. iloczyn zera i liczby niewymiernej jest równy zero, jest więc wymierny. Jednak za wyjątkiem takiego przypadku możemy rozumować podobnie jak w zadaniu poprzednim.

Otrzymamy wówczas następujące twierdzenie:
Iloczyn **różnej od zera** liczby wymiernej oraz liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

97. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?

Odpowiedź: **Tak**, mamy bowiem

$$a=\frac{(a+b)-(b+c)+(c+a)}{2}$$

i podobnie dla liczb b, c.

98. Liczby $a+b$, $b+c$ i $c+a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a+b+c$ jest niewymierna?

Odpowiedź: **Nie**, np. dla liczb

$$a=\sqrt{2}$$

$$b=\sqrt{2}$$

$$c=-2\sqrt{2}$$

mamy

$$a+b=2\sqrt{2}$$

$$b+c=-\sqrt{2}$$

$$c+a=-\sqrt{2}$$

oraz

$$a+b+c=0\,.$$

99. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?

Odpowiedź: **Nie**, np. dla liczb

$$a=c=\sqrt{2}$$

$$b=d=-\sqrt{2}$$

mamy

$$a+b=b+c=c+d=d+a=0\,.$$

100. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ i $d+e$, $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

Odpowiedź: **Tak**, mamy bowiem

$$a=\frac{(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)}{2}$$

i podobnie dla liczb b, c, d, e.

101. Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n, liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.

Odpowiedź: Najbardziej narzucający się przykład to

$$\frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

102. Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

Odpowiedź: **Tak.** Ze wzoru (przy standardowych oznaczeniach)

$$S_{2007} = 2007 \cdot a_{1004}$$

otrzymujemy

$$a_{1004} = \frac{S_{2007}}{2007},$$

skąd wynika, że wyraz środkowy a_{1004} jest liczbą wymierną.

103. To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

Odpowiedź: **Nie.** Np. postęp arytmetyczny określony wzorem

$$b_n = (2n - 2009) \cdot \sqrt{2} \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots,2008$$

ma wszystkie wyrazy niewymierne i sumę zero.

Postęp ten ma pierwszy wyraz równy $-2007\sqrt{2}$, ostatni $2007\sqrt{2}$. Różnica postępu jest równa $2\sqrt{2}$.

Postęp arytmetyczny określony wzorem $a_n = b_n + 5000$ ma wszystkie wyrazy niewymierne dodatnie i sumę 10040000.

104. Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach.

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x, że

a) $0 < x < 1$ oraz liczba x jest niewymierna,

b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,

c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,

d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,

e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,

f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,

g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,

h) 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,

i) 2^x+3^x jest liczbą wymierną,

j) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

k) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

l) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,

m) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,

n) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,

o) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,

p) $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,

r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,

s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,

t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź:

a) $0<x<1$ oraz liczba x jest niewymierna,
$x=1/\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
$x=2{,}4$

c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
$x=\sqrt[5]{2}$

d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
$x=\sqrt{2}$

e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
$x=\sqrt{2}$

f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x+\dfrac{1}{x}$ jest wymierna,
Rozwiązując równanie

$$x+\frac{1}{x}=w$$

otrzymujemy

$$x^2-wx+1=4\,,$$

skąd

$$x=\frac{w\pm\sqrt{w^2-4}}{2}\,.$$

Przyjmując np. $w=4$ oraz $\pm=+$ otrzymujemy $x=\sqrt{3}+2$.

g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,

$x=\log_2\sqrt{3}=\dfrac{\log_2 3}{2}$ prowadzi do $2^x=\sqrt{3}$

h) 2^x+3^x jest liczbą niewymierną,
$x=1/2$
i) 2^x+3^x jest liczbą wymierną,
$x=1$
j) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
$x=3$
k) $\log_2 x+\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
$x=1$
l) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
$x=3$
m) $\log_2 x\cdot\log_3 x$ jest liczbą wymierną,
$x=1$
n) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
$x=1$
o) $2^x+\log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
$x=1/2$
p) $x+\log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
$x=1/2$
q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
$x=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$, wówczas $x^{\sqrt{2}}=1/4$
r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
$x=2^{\sqrt{2}/4}$, wówczas $x^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
Równanie

$$\log_x(1+x)=w$$

prowadzi do

$$x^w=x+1\,.$$

Szansę na rozwiązanie tego równania mamy wtedy, gdy sprowadza się ono do równania kwadratowego.

Dla $w=2$ otrzymujemy

$$x^2=x+1\,,$$

co prowadzi do przykładu

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Dla $w=-1$ otrzymujemy

$$x^{-1}=x+1$$

$$1=x^2+x\,,$$

co prowadzi do przykładu

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Dla $w=1/2$ otrzymujemy

$$x^{1/2}=x+1\,.$$

Po podstawieniu $y=\sqrt{x}$ dostajemy

$$y=y^2+1\,,$$

co nie ma rozwiązań rzeczywistych.

t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.

$x=2$