7. Szkicowanie wykresów prostych funkcji. Podstawowe własności funkcji: różnowartościowość, monotoniczność, okresowość, parzystość, nieparzystość. Wyznaczanie zbioru wartości prostych funkcji na podanym przedziale.

9 stycznia 2010 r.

105. Funkcja jest

a) okresowa

b) parzysta

c) nieparzysta

wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest niezmienniczy ze względu na .....

Odpowiedź:

a) pewną translację (przesunięcie) o wektor równoległy do osi OX

b) symetrię osiową względem osi OY

c) symetrię środkową względem początku układu współrzędnych

106. Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta? Monotoniczna?

a) $f(x)=0$

b) $f(x)=37$

c) $f(x)=2x$

d) $f(x)=2x^2+1$

e) $f(x)=14x^5+6x^3$

f) $f(x)=14x^6+6x^4$

g) $f(x)=x^6+x^5$

Odpowiedź:

a) parzysta, nieparzysta, niemalejąca, nierosnąca

b) parzysta, niemalejąca, nierosnąca

c) nieparzysta, rosnąca

d) parzysta, nie jest monotoniczna

e) nieparzysta, rosnąca

f) parzysta, nie jest monotoniczna

g) nie jest parzysta ani nieparzysta, nie jest monotoniczna

107. Niech

$$f(x)=\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|,$$

gdzie [.] oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej. Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

a) $f_1(x)=f(2x)$

b) $f_2(x)=f(x/2)$

c) $f_3(x)=2f(x)$

d) $f_4(x)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)$

e) $f_5(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$

f) $f_6(x)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$

g) $f_7(x)=\frac{1}{2}-f(x)$

h) $f_8(x)=f\left(\left|x-\frac{1}{4}\right|\right)$

i) $f_9(x)=\left|f\left(x-\frac{1}{4}\right)\right|$

j) $f_{10}(x)=\frac{f(2x)}{2}$

k) $f_{11}(x)=f(x)+x$

l) $f_{12}(x)=5f(x)+3x$

108. Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

a) $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$

b) $f(x)=\frac{x}{x-1}$

c) $f(x)=2+\frac{1}{x+3}$

d) $f(x)=1-\frac{1}{x}$

e) $f(x)=1-\frac{1}{|x|}$

f) $f(x)=1-\frac{1}{x-2}$

g) $f(x)=1-\frac{1}{|x|-2}$

h) $f(x)=1-\frac{1}{|x-2|}$

i) $f(x)=\left|1-\frac{1}{x-2}\right|$

j) $f(x)=\left|1-\frac{1}{|x|-2}\right|$

k) $f(x)=\left|1-\frac{1}{|x-2|}\right|$

109. Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x)=f(x), \qquad f(6-x)=f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

Rozwiązanie:
Warunek

$$f(3-x)=f(x)$$

jest równoważny temu, że wykres funkcji f jest osiowosymetryczny względem prostej o równaniu $x=3/2$.

Podobnie, warunek

$$f(6-x)=f(x)$$

jest równoważny temu, że wykres funkcji f jest osiowosymetryczny względem prostej o równaniu $x=3$.

Wykres funkcji f jest zatem niezmienniczy ze względu na złożenie tych symetrii, które, przy zachowaniu odpowiedniej kolejności, jest przesunięciem o wektor $(3,0)$. Zatem funkcja f jest funkcją okresową o okresie 3.

Stąd natychmiast otrzymujemy

$$f(-x)=f(3-x)=f(x)\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest parzysta.

Uwaga: Okresowość funkcji f można uzyskać także bez rozważań geometrycznych, zauważając, że

$$f(3-x)=f(6-x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

110. Dla każdej z liczb $i\in\{1,2,\ldots,13\}$ wskazać taką liczbę $j\in\{1,2,\ldots,13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x))=x\,.$$

$f_1(x)=37+x$
$f_2(x)=37-x$

$f_3(x)=x-37$

$f_4(x)=3x-2$

$f_5(x)=3x-4$

$f_6(x)=3x-6$

$f_7(x)=\frac{x}{3}+2$

$f_8(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$

$f_9(x)=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$

$f_{10}(x)=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}|x|$

$f_{11}(x)=-\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}|x|$

$f_{12}(x)=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}|x|$

$f_{13}(x)=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}|x|$

Odpowiedź: Podany w treści zadania warunek oznacza, że funkcje f_i oraz f_j są funkcjami wzajemnie odwrotnymi, czyli ich wykresy są symetryczne względem prostej o równaniu $y=x$. Należy więc naszkicować wykresy wszystkich podanych funkcji, a następnie połączyć je w pary wykresów symetrycznych.

Parami (i,j) numerów funkcji wzajemnie odwrotnych są (1,3), (4,8), (5,9), (6,7) oraz (12,13).

Pozostałe trzy funcje f_2, f_{10}, f_{11} są odwrotne same do siebie.

111. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x)=x^2$ na przedziale

a) $[1,4)$

b) $[-2,-1)$

c) $(-3,2)$

Odpowiedź:

a) $[1,16)$

b) $(1,4]$

c) $[0,9)$

112. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x)=|2^x-8|$ na przedziale

a) $(0,1)$

b) $(2,4]$

c) $\left(-\infty,3\frac{1}{2}\right]$

Odpowiedź: Należy naszkicować wykres funkcji, a następnie przy jego pomocy udzielić odpowiedzi.

a) $(6,7)$

b) $[0,8]$

c) $[0,8)$

113. Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x)=x^4-50x^2$ na przedziale

a) $(-10,-6)$

b) $(-7,-1)$

c) $(-6,1)$

d) $(-1,7)$

e) $(3,10)$

Odpowiedź: Należy naszkicować wykres funkcji, a następnie przy jego pomocy udzielić odpowiedzi. W tym celu zauważamy, że

$$f(x)=x^4-50x^2+625-625=\left(x^2-25\right)^2-625\,.$$

a) $(-504,5000)$

b) $[-625,-49)$

c) $[-625,0]$

d) $[-625,0]$

e) $[-625,5000)$

Z przyczyn technicznych rozwiązania zadań sprowadzających się do naszkicowania wykresu nie są zamieszczone.