8. Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych oraz prostych nierówności zawierających funkcje: wartość bezwzględna, logarytmiczna, potęgowa.

23 stycznia 2010 r.

114. Rozwiązać równania i nierówności

a) $x^2-103x+300=0$

b) $3x<\sqrt{x^2+8}$

c) $\sqrt{x^7+x+7}=3$

d) $x^4-5x^2+4<0$

e) $(x^2+x+1)^{3x}>(x^2+x+1)^{x+1}$

f) $\log_{2x}(x^2+1)\leqslant\log_{2x}(x^2+3x)$

g) $\log_2 x+\log_x 4<3$

h) $||||||x|-1|-1|-1|-1|-1|=\dfrac{x}{2}$

i) $\left|x^2-17\right|=8$

j) $|x-1|+|x|+|x+1|>x^2+\dfrac{20}{9}$

Rozwiązanie:

a) $x^2-103x+300=0$

Skorzystamy ze wzorów Viete'a.

Równanie kwadratowe o pierwiastkach x_1 i x_2 i współczynniku 1 przy x^2 ma postać

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0\,.$$

Jeśli pierwiastki równania są całkowite, jest spora szansa na zgadnięcie rozwiązań równania bez korzystania ze wzoru ogólnego na rozwiązania równania kwadratowego.

W danym równaniu musimy odpowiedzieć na pytanie: Jakie dwie liczby dają w sumie 103, a w iloczynie 300? Nietrudno zauważyć, że warunek ten jest spełniony przez liczby 3 oraz 100 i to są właśnie rozwiązania równania.

b) $3x<\sqrt{x^2+8}$

Po podniesieniu nierówność stronami do kwadratu otrzymujemy kolejno

$$9x^2<x^2+8$$

$$8x^2<8$$

$$x^2<1$$

$$|x|<1\,,$$

skąd widać, że zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-1,1)$.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 121.

c) $\sqrt{x^7+x+7}=3$

Zwykle rozwiązywanie równania zaczynamy od wyznaczenia dziedziny. W tym celu należałoby rozwiązać nierówność

$$x^7+x+7\geqslant 0\,,$$

co jednak nastręcza poważne problemy.

Możemy też postępować inaczej. Możemy nie wyznaczać dziedziny równania, a dopiero po jego rozwiązaniu sprawdzić, czy otrzymane rozwiązania należą do dziedziny.

Podnosimy dane równanie stronami do kwadratu **(UWAGA!!! Ta operacja zmienia dziedzinę równania)**. Otrzymujemy

$$x^7+x+7=9\,.$$

Zauważamy, że $x=1$ spełnia powyśze równanie. Ponadto wyrażenie po lewej stronie jest rosnącą funkcją zmiennej x, a zatem nie może ono przyjmować wartości 3 dla więcej niż jednego argumentu x. Stąd $x=1$ jest **jedynym** rozwiązaniem. Podstawiając $x=1$ do równania danego w treści zadania stwierdzamy, że jest to poprawne rozwiązanie.

d) $x^4-5x^2+4<0$

Dana w zadaniu nierówność to tzw. nierówność dwukwadratowa. Sprowadzamy ją do nierówności kwadratowej wykonując podstawienie $x^2=y$, przy czym pojawia się dodatkowy warunek $y\geqslant 0$.

Otrzymujemy

$$y^2-5y+4<0\,,$$

co po rozwiązaniu prowadzi do

$$1<y<4\,.$$

W konsekwencji dana w zadaniu nierówność sprowadza się do

$$1<x^2<4\,,$$

czyli

$$1<|x|<2\,.$$

Zatem zbiór rozwiązań to $(-2,-1)\cup(1,2)$.

e) $(x^2+x+1)^{3x}>(x^2+x+1)^{x+1}$

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie x^2+x+1 jest dodatnie, dziedziną nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Nierówność postaci

$$a^b > a^c$$

jest

- równoważna nierówności $b > c$ przy $a > 1$,
- fałszywa przy $a = 1$,
- równoważna nierówności $b < c$ przy $0 < a < 1$.

Rozważamy więc 3 przypadki:

1° $x^2+x+1>1$, czyli $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

W tym przypadku nierówność jest równoważna nierówności

$$3x > x+1\,,$$

czyli

$$x > \frac{1}{2}\,.$$

Po uwzględnieniu warunku $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ otrzymujemy następujący zbiór jako przyczynek do zbioru rozwiązań nierówności danej w zadaniu: $(1/2, +\infty)$.

2° $x^2+x+1=1$, czyli $x \in \{-1, 0\}$.

W tym przypadku nierówność nie ma rozwiązań.

3° $x^2+x+1<1$, czyli $x \in (-1, 0)$.

W tym przypadku nierówność jest równoważna nierówności

$$3x < x+1\,,$$

czyli

$$x < \frac{1}{2}\,.$$

Po uwzględnieniu warunku $x \in (-1, 0)$ otrzymujemy następujący zbiór jako przyczynek do zbioru rozwiązań nierówności danej w zadaniu: $(-1, 0)$.

Odpowiedź: Zbiór rozwiązań nierówności to $(-1, 0) \cup (1/2, +\infty)$.

f) $\log_{2x}(x^2+1) \leqslant \log_{2x}(x^2+3x)$

Najpierw wyznaczamy dziedzinę nierówności.

Po pierwsze, podstawa logarytmu musi być liczbą dodatnią różną od 1, co wymusza nierówności $2x > 0$ oraz $2x \neq 1$. To ogranicza nas do $x \in (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$.

Po drugie, liczby logarytmowane muszą być dodatnie. Jednak nierówność $x^2+1>0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x, natomiast nierówności $x^2+3x>0$ nie musimy rozwiązywać, jeśli zauważymy, że jest ona prawdziwa dla x dodatnich, a do takich już jesteśmy ograniczeni.

Ostatecznie dziedziną nierówności jest zbiór $(0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$.

Nierówność postaci

$$\log_a b \leqslant \log_a c$$

jest

• równoważna nierówności $b \leqslant c$ przy $a > 1$,

• równoważna nierówności $b \geqslant c$ przy $0 < a < 1$.

Rozważamy więc 2 przypadki:

1° $2x > 1$, czyli $x \in (1/2, +\infty)$.

W tym przypadku nierówność jest równoważna nierówności

$$x^2 + 1 \leqslant x^2 + 3x\,,$$

czyli

$$x \geqslant \frac{1}{3}\,.$$

Po uwzględnieniu warunku $x \in (1/2, +\infty)$ otrzymujemy następujący zbiór jako przyczynek do zbioru rozwiązań nierówności danej w zadaniu: $(1/2, +\infty)$.

2° $0 < 2x < 1$, czyli $x \in (0, 1/2)$.

W tym przypadku nierówność jest równoważna nierówności

$$x^2 + 1 \geqslant x^2 + 3x\,,$$

czyli

$$x \leqslant \frac{1}{3}\,.$$

Po uwzględnieniu warunku $x \in (0, 1/2)$ otrzymujemy następujący zbiór jako przyczynek do zbioru rozwiązań nierówności danej w zadaniu: $(0, 1/3]$.

Odpowiedź: Zbiór rozwiązań nierówności to $(0, 1/3] \cup (1/2, +\infty)$.

g) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$

Dziedziną nierówności jest zbiór $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Podstawiając $y = \log_2 x$, $y \neq 0$ oraz zauważając, że $\log_x 4 = 2\log_x 2 = 2/y$ sprowadzamy daną nierówność do postaci

$$y + \frac{2}{y} < 3\,.$$

Pomnożymy stronami powyższą nierówność przez y.

1° W przypadku $y > 0$ operacja ta nie wymaga zmiany kierunku nierówności.

Otrzymujemy nierówność kwadratową

$$y^2 - 3y + 2 < 0\,,$$

co prowadzi do $y \in (1, 2)$, czyli $x \in (2, 4)$.

2° W przypadku $y < 0$ przemnożenie nierówności stronami przez y wiąże się z koniecznością zmiany kierunku nierówności.

Otrzymujemy nierówność kwadratową

$$y^2-3y+2>0\,,$$

co prowadzi do $y\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

Uwzględnienie warunku $y<0$ pozostawia $y\in(-\infty,0)$, czyli $x\in(0,1)$.

Odpowiedź: Zbiór rozwiązań nierówności to $(0,1)\cup(2,4)$.

h) $||||||x|-1|-1|-1|-1|-1|=\frac{x}{2}$

Naszkicowanie wykresów funkcji występujących po obu stronach równania prowadzi do rozwiązań $x=2$, $x=10$ oraz wskazuje na istnienie rozwiązania w przedziale $(0,1)$.

Z wykresu odczytujemy, że w tym przedziale równanie przybiera postać

$$1-x=\frac{x}{2}\,,$$

co prowadzi do $x=2/3$.

Odpowiedź: Równanie ma trzy rozwiązania: 2/3, 2 oraz 10.

i) $\left|x^2-17\right|=8$

Równanie przybiera postać alternatywy

$$x^2-17=8 \qquad \text{lub} \qquad x^2-17=-8\,,$$

co prowadzi kolejno do

$$x^2=25 \qquad \text{lub} \qquad x^2=9$$

$$|x|=5 \qquad \text{lub} \qquad |x|=3\,.$$

Odpowiedź: Równanie ma cztery rozwiązania: -5, -3, 3 oraz 5.

j) $|x-1|+|x|+|x+1|>x^2+\frac{20}{9}$

Zauważmy, że funkcje występujące po obu stronach nierówności są parzyste. Oznacza to, że rozwiązując nierówność możemy ograniczyć się do $x\geqslant 0$ a następnie skopiować zbiór rozwiązań symetrycznie względem zera.

Wobec założenia $x\geqslant 0$ nierówność przyjmuje postać

$$|x-1|+2x+1>x^2+\frac{20}{9}$$

$$|x-1|>x^2-2x+1+\frac{2}{9}$$

$$|x-1|>(x-1)^2+\frac{2}{9}\,, \qquad (*)$$

co po podstawieniu $y=x-1$, $y\geqslant -1$, prowadzi do

$$|y|>y^2+\frac{2}{9}\,.$$

Znowu otrzymaliśmy nierówność, która po obu stronach ma funkcje parzyste, tym razem zmiennej y. Rozwiążemy ją więc przy założeniu $y \geqslant 0$, a potem symetrycznie odbijemy zbiór rozwiązań.

Wobec $y \geqslant 0$ możemy zapisać nierówność w postaci

$$y > y^2 + \frac{2}{9}$$

$$y^2 - y + \frac{2}{9} < 0 .$$

Powyższa nierówność jest spełniona dla $y \in (1/3, 2/3)$.

Dołączając odbicie symetryczne powyższego zbioru względem zera, otrzymujemy $y \in (-2/3, -1/3) \cup (1/3, 2/3)$. Powinniśmy jeszcze ograniczyć się do $y \geqslant -1$, ale tu akurat niczego to nie zmienia.

Zatem nierówność $(*)$ jest spełniona dla

$$(x-1) \in (-2/3, -1/3) \cup (1/3, 2/3) ,$$

czyli

$$x \in (1/3, 2/3) \cup (4/3, 5/3) .$$

Dołączenie do powyższego zbioru jego odbicia symetrycznego względem zera prowadzi do rozwiązania wyjściowej nierówności:

$$x \in (-5/3, -4/3) \cup (-2/3, -1/3) \cup (1/3, 2/3) \cup (4/3, 5/3) .$$

115. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych p, q, że p i q są pierwiastkami równania

$$x^2 + px + q = 0 .$$

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2 + px + q = (x-p)(x-q) .$$

....

.... przeprowadź odpowiednie rachunki ....

....

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2 + p^2 + q = 0$$

oraz

$$q^2+pq+q=0\,.$$

....

.... przeprowadź odpowiednie rachunki ....

....

Rozwiązanie:

Sposób I

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość

$$x^2+px+q=(x-p)(x-q)\,.$$

Po wymnożeniu prawej strony otrzymujemy

$$x^2+px+q=x^2-(p+q)+pq\,.$$

Dwa wielomiany są tożsamościowo równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współczynniki są równe.

To prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} p &= -p-q \\ q &= pq\,. \end{cases}$$

Pierwsze równanie sprowadza się do

$$q=-2p\,,$$

a drugie do alternatywy

$$p=1 \quad \text{lub} \quad q=0\,.$$

Stąd otrzymujemy:

Odpowiedź: Są dwie pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=1$, $q=-2$ oraz $p=0$, $q=0$.

Sposób II

Liczby p i q są pierwiastkami podanego równania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p^2+p^2+q=0$$

oraz

$$q^2+pq+q=0\,.$$

Pierwsze równanie sprowadza się do

$$q=-2p^2\,,$$

a drugie do alternatywy

$$q+p+1=0 \quad \text{lub} \quad q=0\,.$$

Jeżeli $q=0$, to także $p=0$. Natomiast w przypadku $q\neq 0$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} q &= -2p^2 \\ q &= -p-1\,. \end{cases}$$

skąd

$$2p^2=p+1\,,$$

co prowadzi do

$$p=1 \quad \text{lub} \quad p=-1/2\,,$$

a to odpowiednio do

$$q=-2 \quad \text{oraz} \quad q=-1/2\,.$$

Odpowiedź: Są trzy pary liczb spełniające warunki zadania:
$p=0$, $q=0$; $p=-1/2$, $q=-1/2$ oraz $p=1$, $q=-2$.

Dlaczego oba sposoby rozwiązania prowadzą do różnych odpowiedzi?

Wyjaśnienie znajduje się po zadaniu 121.

9. Funkcje trygonometryczne. Elementy geometrii: twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów, twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, okrąg wpisany i opisany na wielokącie, wielokąty foremne (wstęp).

116. W trapezie o wysokości 12 ramiona mają długości 15 i 20, a jedna z podstaw ma długość 50. Jaka jest długość drugiej podstawy?

Rozwiązanie:
Oznaczmy kolejne wierzchołki trapezu przez A, B, C, D tak, aby podstawą trapezu był odcinek $\overline{AB}$ (zrób rysunek), a przy tym $AD=15$ oraz $BC=20$.

Niech C' i D' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków C i D na podstawę $\overline{AB}$.

Wówczas $CC'=DD'=12$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych ADD' oraz BCC' otrzymujemy odpowiednio $AD'=9$ oraz $BC'=16$.

Stąd $C'D'=50-16-9=25$ i w konsekwencji $CD=25$.

Odpowiedź: Druga podstawa trapezu ma długość 25.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 121.

117. Uporządkować niemalejąco następujące liczby: $\sin 18°$, $\sin 36°$, $\sin 72°$, $\sin 144°$, $\cos 18°$, $\cos 36°$, $\cos 72°$, $\cos 144°$.

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzorów redukcyjnych zapisujemy każdą z liczb w postaci $\pm\sin\alpha$, gdzie $\alpha \in [0°, 90°]$ a następnie korzystamy z faktu, że funkcja *sinus* jest w tym przedziale rosnąca.

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\cos 144° < \sin 18° = \cos 72° < \sin 36° = \sin 144° < \cos 36° < \sin 72° = \cos 18° .$$

Przy tym $\cos 144° < 0$ oraz $\cos 36° = \sin 54°$.

118. Niech $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Dokończyć i uzasadnić:
a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $120°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...
f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $60°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...

Rozwiązanie:
a) Zastosowanie nierówności trójkąta daje warunek

$$a+b>c .$$

Pamiętajmy, że nierówność musi być ostra - zdegenerowane "trójkąty" o trzech wierzchołkach współliniowych nie są w geometrii uważane za trójkąty - trójkąt zawsze ma dodatnie pole.
b) Twierdzenie Pitagorasa prowadzi do warunku

$$a^2+b^2=c^2 .$$

c) Twierdzenie cosinusów prowadzi do warunku

$$a^2+b^2<c^2 .$$

d) Twierdzenie cosinusów prowadzi do warunku

$$a^2+b^2>c^2\,.$$

e) Twierdzenie cosinusów prowadzi do warunku

$$a^2+b^2+ab=c^2\,.$$

f) Twierdzenie cosinusów prowadzi do warunku

$$a^2+b^2-ab=c^2\,.$$

W dwóch podpunktach podane wyżej rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędów oraz rozwiązania poprawne znajdują się po zadaniu 121.

119. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30°, a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°, będący połową trójkąta równobocznego o boku 2, ma boki długości 1, $\sqrt{3}$ oraz 2.

Odpowiedź: Bok AB ma długość 2.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 121.

120. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

Rozwiązanie:

... równoramienny.

Środek okręgu opisanego jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Jeżeli trójkąt jest równoramienny, to symetralna trójkąta przechodzi przez wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku (a dokładniej podstawy trójkąta, jeśli ustawić trójkąt w tradycyjny sposób - tak, aby ramiona były równe, a oś symetrii pionowa).

Jeżeli zaś środek okręgu opisanego leży na prostej przechodzącej przez wierzchołek trójkąta i środek przeciwległego boku, to prosta ta pokrywa się z symetralną owego boku, albowiem każda z tych dwóch prostych przechodzi przez środek okręgu opisanego i środek boku. Skoro symetralna boku przechodzi przez przeciwległy wierzchołek trójkąta, to trójkąt jest równoramienny.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 121.

121. Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

Rozwiązanie:

Prowadzimy prostą przez środek okręgu. Prosta ta przecina okrąg w punktach A i B, a odcinek $\overline{AB}$ jest średnicą okręgu.

Wybieramy punkt C na okręgu, różny od A i B. Rysujemy odcinki $\overline{AC}$ oraz $\overline{BC}$.

Wowczas kąt $\sphericalangle ACB$ jest prosty jako kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy.

Wyjaśnienie błędów w niektórych rozwiązaniach.

114. b) Nierówność można podnosić stronami do kwadratu, jeżeli obie strony są nieujemne. Ten warunek jest spełniony tylko dla $x \geqslant 0$. Jednak dla $x < 0$ lewa strona jest ujemna, a prawa dodatnia, więc nierówność jest oczywiście spełniona.

Podsumowując: Podany sposób rozwiązania działa poprawnie przy założeniu $x \geqslant 0$, a ponieważ równanie jest spełnione przez wszystkie liczby ujemne x, ostatecznie otrzymujemy zbiór rozwiązań równania: $(-\infty, 1)$.

115. Może się wydać to dziwne, ale obie metody rozwiązania są na swój sposób poprawne. Problem polega na właściwym sformułowaniu i zrozumieniu treści zadania.

Kluczowe jest sformułowanie: **p i q są pierwiastkami równania**. W zasadzie należałoby je rozumieć jako: **liczba p jest pierwiastkiem równania i liczba q jest pierwiastkiem równania** dopuszczając, że dwa razy mówimy o tej samej liczbie. W tym sensie słuszny jest sposób II, który znajduje dodatkowe rozwiązanie. W tym rozwiązaniu $p = q = -1/2$, a równanie

$$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ma dwa pierwiastki: $-1/2$ oraz 1, ale zarówno $p = -1/2$ jest pierwiastkiem, jak i $q = -1/2$ jest pierwiastkiem, jednakże tym samym.

Sposób I idzie z duchem interpretacji zadania jako **pierwiastkami równania są p i q** w rozumieniu, że p i q mają stanowić komplet rozwiązań równania, mają być więc różnymi pierwiastkami wyjąwszy przypadek, w którym równanie ma pierwiastek podwójny.

Należy jednak uczciwie przyznać, że kwestia interpretacji tego typu sformułowań nie jest całkiem jednoznaczna, zwłaszcza w geometrii. Jeśli mówimy: **trójkąt ma wierzchołki A, B, C**, to jesteśmy skłonni się zgodzić, że chodzi o trzy różne wierzchołki trójkąta.

Jeśli zaś powiemy: **punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta**, to w zasadzie jesteśmy skłonni to zinterpretować tak samo, ale sytuacja nie jest już tak jednoznaczna. Raczej nie powiemy **kwadrat ma wierzchołki A, B, C**, bo oczekujemy tu wymienienia wszystkich wierzchołków. Ale sformułowanie **punkt A jest wierzchołkiem kwadratu** jest już całkiem na miejscu i nie niesie bynajmniej sugestii, że kwadrat ów ma tylko jeden wierzchołek.

A co ze sformułowaniem: **punkty A, B są wierzchołkami kwadratu**? Czy mają być różne? Lepiej unikać sformułowań, które pozostawiają tego typu wątpliwości.

116. W rozwiązaniu wykazaliśmy, że różnica długości podstaw jest równa 25, jednak z założeń zadania wcale nie wynika, że 50 jest długością podstawy dłuższej. Zatem druga podstawa może mieć też długość 75.

Odpowiedź: Druga podstawa trapezu ma długość 25 lub 75.

Powyższe rozwiązanie nadal jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się na końcu tego rozdziału.

118. c) W przeciwieństwie do pozostałych podpunktów, podany warunek nie niesie żadnego, choćby ukrytego, ograniczenia liczby c od góry. Nie mamy więc gwarancji, że liczby a, b, c spełniają nierówność trójkąta i dlatego tę nierówność musimy dołożyć jako dodatkowy warunek.

Prawidłowa odpowiedź to:

$$a^2+b^2<c^2 \quad \text{oraz} \quad a+b>c\,.$$

Można też podać ten warunek w postaci

$$a^2+b^2<c^2<a^2+2ab+b^2\,.$$

118. f) W przeciwieństwie do pozostałych podpunktów, kątem, o którego wielkość musimy zadbać, nie jest kąt największy (a więc leżący naprzeciw najdłuższego boku). Kąt 60° może leżeć tylko naprzeciw boku długości b, a zatem poprawny wzór to

$$a^2+c^2-ac=b^2\,.$$

119. W rozwiązaniu skorzystaliśmy z cechy przystawania trójkątów *kąt-bok-bok*, która nie jest prawdziwa. Jednak zadając w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A oraz boki

AC i BC możemy otrzymać, z dokładnością do przystawania, co najwyżej dwie możliwe konfiguracje. W tym przypadku pominęliśmy konfigurację, w której trójkąt ABC jest równoramienny, z kątem 120° przy wierzchołku C.

Odpowiedź: Bok AB może mieć długość 1 lub 2.

120. Oparliśmy się na następującym fakcie: dwie proste przechodzące przez środek boku i środek okręgu opisanego pokrywają się. Wiemy bowiem, że przez dwa punkty można przeprowadzić tylko jedną prostą. Ale UWAGA !!! Przez **dwa różne punkty !!!**.

Rozumowanie nie uwzględnia przypadku, gdy środek boku pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego. Na szczęście dokładnie wiadomo, kiedy taka sytuacja ma miejsce. Otóż w trójkącie ostrokątnym środek okręgu opisanego leży wewnątrz trójkąta. W trójkącie rozwartokątnym na zewnątrz. A w trójkącie prostokątnym na obwodzie, a dokładniej, pokrywa się ze środkiem przeciwprostokątnej.

Nietrudno stwierdzić, że dowolny trójkąt prostokątny również spełnia warunki zadania.

Poprawne dokończenie formułki w treści zadania brzmi więc:

... równoramienny lub prostokątny.

Ponownie 116. W rozwiązaniu przyjęliśmy, że oba kąty przy jednej z podstaw trapezu są ostre. Tak się zwykło rysować trapez, pamiętać jednak należy o tym, że trapez może być *pochylony* - wtedy, gdy przy każdej podstawie ma jeden kąt ostry i jeden rozwarty.

Wówczas jeden z rzutów C', D' znajdzie się na podstawie $\overline{AB}$, ale drugi będzie leżał na jej przedłużeniu. W konsekwencji różnica długości podstaw będzie równa $16-9=7$, co da nam dodatkowe dwa rozwiązania: 43 i 57.

Odpowiedź: Druga podstawa trapezu może mieć długość 25, 43, 57 lub 75.