9. Funkcje trygonometryczne. Elementy geometrii: twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów, twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, okrąg wpisany i opisany na wielokącie, wielokąty foremne (c.d).

27 lutego 2010 r.

122. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości całkowitej a, b, c. Wiadomo, że $c=a+7$. Udowodnić, że wówczas a jest liczbą parzystą.

123. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $p=12$, $r=1$, $S=6$

b) $p=16$, $r=2$, $S=18$

c) $p=20$, $r=3$, $S=30$

d) $p=24$, $r=4$, $S=50$

e) $p=28$, $r=5$, $S=70$

124. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB=\sphericalangle ACB+60^\circ\,.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB.

125. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

126. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.

a) w czworokąt można wpisać okrąg

b) na czworokącie można opisać okrąg

c) czworokąt jest równoległobokiem

d) czworokąt jest rombem

e) czworokąt jest prostokątem

f) sumy miar przeciwległych kątów są równe

g) sumy długości przeciwległych boków są równe

h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe

i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy

j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy

k) przekątne są prostopadłe

l) przekątne dzielą się na połowy

127. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)

a) 1, 3, 10, 15

b) 2, 4, 10, 15

c) 3, 27, 10, 15

d) 4, 30, 10, 15

128. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

129. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

130. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

131. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b+d<a+c+e\,.$$

132. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a+c+e=b+d+f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)[1] na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)[1].

133. Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

134. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

a) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

b) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

c) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest forem-

[1] niepotrzebne skreślić

ny.

d) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

135. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C, że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB \ ?$$

10. Elementy kombinatoryki geometrycznej: suma kątów wielokąta, liczba przekątnych wielokąta, porównywanie pól wielokątów w oparciu o proste zależności geometryczne jak np. przystawanie i zawieranie, rozpoznawanie przystających konfiguracji geometrycznych.

136. Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n-kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli

a) $k=2$

b) $k=3$

c) $k=5$

d) $k=10$