9. Funkcje trygonometryczne. Elementy geometrii: twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie cosinusów, twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, okrąg wpisany i opisany na wielokącie, wielokąty foremne (c.d).

27 lutego 2010 r.

122. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości całkowitej a, b, c. Wiadomo, że $c=a+7$. Udowodnić, że wówczas a jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Pitagorasa mamy $a^2+b^2=c^2$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Gdyby liczba a była nieparzysta, to wówczas c byłaby parzysta. Liczba b musiałaby więc być nieparzysta.

Rozważmy reszty z dzielenia przez 4 liczb a^2, b^2 i c^2. Pierwsze dwie przy dzieleniu przez 4 dają resztą 1, ostatnia zaś jest podzielna przez 4 bez reszty, co pokazuje, że równość $a^2+b^2=c^2$ nie może mieć miejsca. Zatem a musi być liczbą parzystą.

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!
Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 135.

123. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla
a) $p=12$, $r=1$, $S=6$
b) $p=16$, $r=2$, $S=18$
c) $p=20$, $r=3$, $S=30$
d) $p=24$, $r=4$, $S=50$
e) $p=28$, $r=5$, $S=70$

Rozwiązanie:

Wielokąt o obwodzie p opisany na okręgu o promieniu r ma pole równe $S=rp/2$. Stąd wynika, że odpowiedzi to
a) TAK
b) NIE
c) TAK
d) NIE
e) TAK

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!
Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 135.

124. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\sphericalangle AOB=\sphericalangle ACB+60^\circ\,.$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB.

Rozwiązanie:
Zrobienie rysunku, na którym łączymy punkt O z wierzchołkami trójkąta ABC, oraz prosty rachunek na kątch prowadzi do zależności

$$\measuredangle AOB = \frac{\measuredangle ACB}{2} + 90^\circ .$$

W połączeniu z warunkiem

$$\measuredangle AOB = \measuredangle ACB + 60^\circ$$

otrzymujemy

$$\measuredangle ACB = 60^\circ .$$

Należy zwrócić uwagę, że trójkąt ABC nie musi być równoboczny. Co więcej, warunek $\measuredangle ACB = 60^\circ$ jest równoważny równości podanej w treści zadania.

125. To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:
Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym otrzymujemy

$$\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle ACB ,$$

co prowadzi do

$$\measuredangle ACB = 60^\circ .$$

Powyższe rozwiązanie jest błędne !!!

Wyjaśnienie błędu oraz rozwiązanie poprawne znajdują się po zadaniu 135.

126. Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.
a) w czworokąt można wpisać okrąg
b) na czworokącie można opisać okrąg
c) czworokąt jest równoległobokiem
d) czworokąt jest rombem
e) czworokąt jest prostokątem
f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
g) sumy długości przeciwległych boków są równe
h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
k) przekątne są prostopadłe
l) przekątne dzielą się na połowy

Odpowiedź:
a) - **g)**

b) - **f)**
c) - **l)**
d) - **j)**
e) - **i)**
h) - **k)**

127. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
a) 1, 3, 10, 15
b) 2, 4, 10, 15
c) 3, 27, 10, 15
d) 4, 30, 10, 15

Rozwiązanie:
Czworokąt o bokach zadanej długości istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy długość każdego z boków jest mniejsza od sumy długości trzech pozostałych boków.

Równoważnie: gdy długość najdłuższego z boków jest mniejsza od sumy długości trzech pozostałych boków.

Odpowiedzi:
a) NIE, gdyż $1+3+10=14<15$
b) TAK, gdyż $2+4+10=16>15$
c) TAK, gdyż $3+10+15=28>27$
d) NIE, gdyż $4+10+15=29<30$

128. Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

Rozwiązanie:
Niech A, B, C będą wierzchołkami trójkąta (zrób rysunek), przy czym

$$AB=3\,,$$
$$BC=4\,,$$
$$CA=5\,.$$

Niech S, T, U będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego do boków trójkąta w wyżej wymienionej kolejności. Niech

$$AS=x\,.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$SB=3-x=BT\,,$$
$$TC=4-(3-x)=1+x=CU\,,$$
$$UA=5-(1+x)=4-x=AS\,,$$

skąd

$$x=4-x$$

i w konsekwencji $x=2$. To pozwala na określenie położenia punktów styczności na bokach trójkąta.

129. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

Odpowiedź: $a+c>b$.

Aby to wykazać należy zrobić rysunek i zaznaczyć odcinki równej długości. Równą długość mają odcinki łączące wierzchołek wielokąta z punktami styczności boków wychodzących z tego wierzchołka.

130. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

Rozwiązanie:

Niech A, B, C, D, E będą wierzchołkami pięciokąta (zrób rysunek), przy czym

$$AB=3\,,$$

$$BC=4\,,$$

$$CD=5\,,$$

$$DE=5\,,$$

$$EA=5\,.$$

Niech S, T, U, V, W będą odpowiednio punktami styczności okręgu wpisanego do boków pięciokąta w wyżej wymienionej kolejności. Niech

$$AS=x\,.$$

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$SB=3-x=BT\,,$$

$$TC=4-(3-x)=1+x=CU\,,$$

$$UD=5-(1+x)=4-x=DV\,,$$

$$VE=6-(4-x)=2+x=EW\,,$$

$$WA=7-(2+x)=5-x=AS\,,$$

skąd

$$x=5-x$$

i w konsekwencji $x=5/2$. To pozwala na określenie położenia punktów styczności na bokach trójkąta.

Należy przy tym upewnić się, że długości odcinków, na które dzielą boki pięciokąta punkty styczności, są dodatnie.

131. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b+d<a+c+e\,.$$

Odpowiedź: Należy zrobić rysunek i zaznaczyć odcinki równej długości.

132. Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a+c+e=b+d+f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)[1] na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)[1].

Rozwiązanie:

Podana równość jest warunkiem **koniecznym**. Aby to wykazać rysujemy sześciokąt opisany na okręgu i zaznaczamy odcinki równej długości.

Nie jest ona warunkiem **dostatecznym**. Przykładem może być sześciokąt o bokach (w kolejności): 1, 1, 1000000, 1, 1, 1000000.

133. Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

Odpowiedź:

Przykład 1: Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° dzielimy dwusieczną kąta prostego.

Przykład 2: Trójkąt o kątach 72°, 72°, 36° dzielimy dwusieczną jednego z kątów o mierze 72°.

Przykład 3: Trójkąt o kątach 36°, 36°, 108° dzielimy trójsieczną kąta rozwartego, tzn. prostą dzielącą go na kąty o miarach w stosunku 2:1, czyli w tym wypadku 72° i 36°.

Przykład 4: Trójkąt o kątach 3α, 3α, α, gdzie

$$\alpha=\frac{180^\circ}{7}$$

dzielimy **odpowiednią** trójsieczną jednego z kątów o mierze 3α.

134. Dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe

a) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

b) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

c) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.

d) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

Odpowiedź:

a) Dla każdego $n\geqslant 3$.

[1] niepotrzebne skreślić

b) Dla każdego nieparzystego $n \geqslant 3$.
c) Dla każdego nieparzystego $n \geqslant 3$.
d) Dla każdego $n \geqslant 3$.

135. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C, że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB \ ?$$

Rozwiązanie:
Odpowiedź: 3.

Z równości kątów wynika, że punkt D leży na tym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt C lub na odbiciu symetrycznym tegoż łuku względem prostej AB (zrób rysunek w przypadku, gdy łuk jest większy od półokręgu). Figura będąca sumą tych dwóch łuków ma z prostą prostopadłą do prostej AB co najwyżej 4 punkty wspólne.

Wyjaśnienie błędów w rozwiązaniach niektórych zadań.

122. Dowód jest błędny, a teza fałszywa. Oto przykład, w którym a jest nieparzyste: $a=5$, $b=13$, $c=12$. Nigdzie nie było napisane, że c jest przeciwprostokątną! Inny przykład to $(a,b,c)=(21,35,28)$.

123. Poprawna odpowiedź w podpunkcie **d)** brzmi: **TAK!**

Subtelność polega na tym, że obwód wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r jest większy od $2\pi r$. Tymczasem dane w podpunkcie **d)** spełniają nierówność przeciwną: $p=24=6\cdot 4=6r<2\pi r$. Nie istnieje więc wielokąt opisany na okręgu o promieniu 4 i mający obwód 24.

Teraz do gry wkracza dokładne zrozumienie logiki stojącej za sformułowaniem pytania:

Czy każdy wielokąt z pustego zbioru wielokątów opisanych na okręgu o promieniu 4 i mających obwód 24 spełnia **blablabla** ? Odpowiedź brzmi TAK.

Odpowiedzi TAK należy też udzielić np. dla następujących danych:
f) $p=24$, $r=4$, $S=-50$

125. Co prawda kąt środkowy ma miarę dwa razy większą od kąta wpisanego w okrąg opartego na tym samym łuku, jednak w przypadku, gdy kąt środkowy jest wklęsły (tzn. ma miarę większą od 180°) zapis $\sphericalangle AOB$ oznacza kąt wypukły.

W tym wypadku zależność między kątem wpisanym i środkowym przyjmuje postać

$$\sphericalangle AOB = 360^\circ - 2\cdot \sphericalangle ACB\,,$$

co w połączeniu z równością

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB + 60^\circ$$

prowadzi do

$$\sphericalangle ACB = 100^\circ .$$

Ostatecznie poprawna odpowiedź brzmi: Kąt $\sphericalangle ACB$ ma miarę 60° lub 100°.

Zwrócić należy uwagę, że ten sam problem mógłby potencjalnie wystąpić w zadaniu **124**. Jednak środek okręgu wpisanego leży zawsze wewnątrz trójkąta i taka sytuacja jak w zadaniu **125** nie ma miejsca.

10. Elementy kombinatoryki geometrycznej: suma kątów wielokąta, liczba przekątnych wielokąta, porównywanie pól wielokątów w oparciu o proste zależności geometryczne jak np. przystawanie i zawieranie, rozpoznawanie przystających konfiguracji geometrycznych.

136. Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n-kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli
a) $k=2$
b) $k=3$
c) $k=5$
d) $k=10$

Rozwiązanie:
Liczba przekątnych w n-kącie wypukłym jest równa $n(n-3)/2$, skąd otrzymujemy

$$k = \frac{n-3}{2} ,$$

czyli

$$n = 2k+3 .$$

W konsekwencji otrzymujemy następujące odpowiedzi
a) $k=2$, $n=7$
b) $k=3$, $n=9$
c) $k=5$, $n=13$
d) $k=10$, $n=23$