Zajęcia w dniu 5.09.2018 r. (SP 3)

Omawiane zadania:

1. Czy liczba 9991 jest pierwsza czy złożona?

2. Czy kwadrat liczby całkowitej może mieć sumę cyfr równą 2018?

Wzory i twierdzenia, które pojawiły się na zajęciach:

Wzór na różnicę kwadratów:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\,.$$

Wzór na kwadrat sumy/różnicy:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2\,.$$

Wzór na sześcian sumy/różnicy:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\,.$$

Wzór na sumę/różnicę sześcianów:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\mp ab+b^2\right)\,.$$

Cecha podzielności przez 3:
Liczba całkowita dodatnia daje przy dzieleniu przez 3 taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez 3 jej suma cyfr.

Cecha podzielności przez 9:
Liczba całkowita dodatnia daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez 9 jej suma cyfr.

Cecha podzielności przez 4:
Liczba całkowita dodatnia daje przy dzieleniu przez 4 taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez 4 jej dwucyfrowa końcówka.

Cecha podzielności przez 8:
Liczba całkowita dodatnia daje przy dzieleniu przez 8 taką samą resztę, jaką daje przy dzieleniu przez 8 jej trzycyfrowa końcówka.

Reszty z dzielenia kwadratów przez 3:
Kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 1 — nigdy nie daje reszty 2.

Szkice rozwiązań zadań:

1. Liczba 9991 jest złożona. Aby to stwierdzić, zauważamy, że

$$9991=10000-9=100^2-3^2=(100-3)\cdot(100+3)=97\cdot 103\,.$$

2. Kwadrat liczby całkowitej nie może mieć sumy cyfr równej 2018. Uzasadniamy to następująco:
Liczba o sumie cyfr 2018 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2, a zatem nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadania (na kilka kolejnych zajęć)

Spróbuj rozwiązać zadania przed zajęciami !!!

Udowodnij, że podana liczba jest złożona:

3. 999 973 **4.** 1 000 343 **5.** 99 999 271 **6.** 999 999 271

7. Uporządkuj rosnąco następujące liczby:

$$2018^2\,,\qquad 2015\cdot 2021\,,\qquad 2017\cdot 2019\,,\qquad 2016\cdot 2020\,.$$

8. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n>1$, dla których liczba n^2-1 jest pierwsza.

9. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n>1$, dla których liczba n^3-1 jest pierwsza.

10. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba n^3+1 jest pierwsza.

11. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n>2$, liczba n^4-1 może być zapisana w postaci iloczynu trzech liczb całkowitych większych od 1.

12. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n>2$, liczba n^8-1 może być zapisana w postaci iloczynu czterech liczb całkowitych większych od 1.

13. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n>2$, liczba n^6-1 może być zapisana w postaci iloczynu czterech liczb całkowitych większych od 1.

Po wykonaniu odpowiednich przekształceń wpisz w miejsce kropek odpowiednie wyrażenia:

14. $(4k\pm1)^2=8\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+1$

15. $(5k\pm1)^2=5\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+1$

16. $(5k\pm2)^2=5\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)+4$

17. $(3k\pm1)^3=9\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\pm1$

18. $(7k\pm1)^3=7\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\pm1$

19. $(7k\pm2)^3=7\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\pm1$

20. $(7k\pm3)^3=7\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\mp1$

Korzystając z zadań **14–20** wymień wszystkie reszty jakie może dawać ...

21. ... kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8.

22. ... suma dwóch kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8.

23. ... suma trzech kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8.

24. ... kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 5.

25. ... sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9.

26. ... suma dwóch sześcianów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 9.

27. ... suma trzech sześcianów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 9.

28. ... sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7.

29. ... suma dwóch sześcianów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 7.

30. Czy sześcian liczby całkowitej dodatniej może mieć sumę cyfr równą 2018?

Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby całkowite dodatnie m, n (i ewentualnie k), że

31. $2m^2+1=n^2$ **32.** $m^2+1=3n^2$ **33.** $5m^2+2=n^2$ **34.** $2m^2+5=3n^2$

35. $7m^2+1=n^2$ **36.** $7m^2+2=n^2$ **37.** $7m^3+2=n^3$ **38.** $9m^3+2=n^3$

39. $m^2+n^2=1\,000\,003$ **40.** $m^2+n^2=1\,000\,006$ **41.** $m^2+n^2+k^2=1\,000\,007$

42. $m^3+n^3=1\,000\,003$ **43.** $m^3+n^3+k^3=1\,000\,003$ **44.** $m^3+n^3=7\,000\,003$

45. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $p+1$ też jest pierwsza.

46. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 też jest pierwsza.

47. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby $p+2$ i $p+4$ też są pierwsze.

48. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby $p+2$, $p+6$, $p+8$ i $p+14$ też są pierwsze.

49. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby p^2+4 i p^2+6 też są pierwsze.

50. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczby p^3+6 i p^3+50 też są pierwsze.

Do samodzielnego poczytania dla chętnych:

Materiały (zadania i trochę wzorków) związane z resztami z dzielenia potęg o podobnym, ale nieco innym zakresie tematycznym niż omawiany na kółku, można będzie znaleźć w **Trapezach 181–183**, które ukażą się o godz. 6:00 w piątki 14, 21 i 28 września 2018 r. (link na dole strony kółka).