Zajęcia w dniu 3.10.2018 r. (SP 3)

Dla każdych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność $2ab \leqslant a^2+b^2$.

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Powyższą nierówność dowodzimy przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy.

Otrzymujemy kolejno nierówności równoważne

$$0 \leqslant a^2-2ab+b^2$$

oraz

$$0 \leqslant (a-b)^2 .$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemy, a co więcej równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a-b=0$, czyli $a=b$.

Następnie na zajęciach omówione zostały zadania **51, 55, 59, 60.**

Zadania (na kilka kolejnych zajęć)

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

51. $4xy \leqslant x^2+4y^2$ **52.** $xy \leqslant x^2+\frac{y^2}{4}$ **53.** $70xy \leqslant 25x^2+49y^2$

---

54. Czy dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n prawdziwa jest nierówność

$$m^2+n^2 \leqslant 2018mn \ ?$$

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x. Kiedy zachodzi równość?

55. $20x \leqslant x^2+100$ **56.** $20x \leqslant 100x^2+1$ **57.** $20x \leqslant 10x^2+10$ **58.** $20x \leqslant 25x^2+4$

---

59. Udowodnij, że nierówność

$$12x^2y^3 \leqslant 4x^4+9y^6$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

---

60. Udowodnij, że nierówność

$$2mn \leqslant m^3+n^3$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n. Kiedy zachodzi równość?

---

61. Udowodnij, że nierówność

$$4m^2n^2 < 4m^5+n^5$$

jest prawdziwa dla każdych liczb całkowitych dodatnich m i n.

Udowodnij, że podana nierówność jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x, y i z. Kiedy zachodzi równość?

62. $30x^2y^3z^5 \leqslant 225x^4y^6+z^{10}$ **63.** $30x^2y^3z^5 \leqslant 25x^4z^{10}+9y^6$

64. $2xy+2yz \leqslant x^2+2y^2+z^2$ **65.** $4xy+4yz \leqslant 4x^2+2y^2+4z^2$

66. $4xy+4yz \leqslant 4x^2+5y^2+z^2$

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których spełnione jest podane równanie.

67. $2xy+2y=x^2+2y^2+1$ **68.** $4xy+4y=x^2+5y^2+4$

69. $4xy+4y=x^2+8y^2+1$ **70.** $4x+4y=x^2+y^2+8$

71. $4x+4y=4x^2+y^2+5$ **72.** $2x+2y=2x^2+2y^2+1$

---

73. Udowodnij, że nierówność

$$2xy+2x^2y\leqslant x^4+x^2+2y^2$$

jest prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych x i y. Kiedy zachodzi równość?

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y, dla których spełnione jest podane równanie.

74. $4xy+2x^2y=x^4+4x^2+2y^2$ **75.** $6x^3+6xy=x^4+18x^2+y^2$

Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $x+y=s$ oraz $xy=p$. Wyraź podane wyrażenie przy pomocy s i p. **76.** x^2+y^2 **77.** x^3+y^3

Rozłóż podane wyrażenie na iloczyn dodając i odejmując odpowiednie wyrażenie i korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów (w pierwszym zadaniu ujawniona jest część rachunków).

78. $x^4+4y^4=x^4+\ldots x^2y^2+4y^4-\ldots x^2y^2=(\ldots\ldots\ldots)^2-(\ldots\ldots\ldots)^2=(\ldots\ldots\ldots)\cdot(\ldots\ldots\ldots)$

79. $x^4+x^2y^2+y^4$ **80.** $x^4-7x^2y^2+y^4$ **81.** $x^4-12x^2y^2+4y^4$ **82.** $x^4-13x^2y^2+4y^4$

Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n podana liczba nie jest kwadratem liczby całkowitej.

83. n^2+n+1 **84.** n^2+4n+7 **85.** n^2+6n+7 **86.** $n^2+6n+11$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.

87. n^2+5n+2 **88.** $n^2+5n+13$ **89.** $n^2+5n+22$ **90.** $n^2+5n+40$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana liczba jest sześcianem liczby całkowitej.

91. n^3+n^2+n+1 **92.** n^3+n^2+3n+5 **93.** n^3+3n^2+2n+8 **94.** $n^3+9n^2+26n+64$

---

95. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3>1+\frac{3}{n}\,.$$

---

96. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\leqslant 1+\frac{7}{n}\,.$$

---

97. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3<1+\frac{5}{n}\,.$$

---

98. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3<1+\frac{4}{n}\,.$$

Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których podana nierówność jest prawdziwa.

99. $n^2+n<100$ **100.** $n^4+n^3<1000$