Wzory skróconego mnożenia

191. Uzupełnij wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąp pojedynczym znakiem + lub −.

a) $a^4 \ldots b^4 = (a+b)\cdot$ ....

b) $a^4 \ldots b^4 = (a-b)\cdot$ ....

c) $a^5 \ldots b^5 = (a+b)\cdot$ ....

d) $a^5 \ldots b^5 = (a-b)\cdot$ ....

e) $(a+b)^4 = a^4 +$ .... $a^3b +$ .... $a^2b^2 +$ .... $ab^3 + b^4$

f) $(a-b)^4 = a^4 -$ ....

g) $(a+b)^5 = a^5 +$ ....

h) $(a-b)^5 = a^5 -$ ....

i) $(a+b)^6 = a^6 +$ ....

j) $(a+b)^7 = a^7 +$ ....

k) $a^n - b^n = (a-b)\cdot$ ....

l) $a^n + b^n = (a+b)\cdot$ .... - dla których n ?

m) $a^n - b^n = (a+b)\cdot$ .... - dla których n ?

n) $a^n + b^n = (a^2+b^2)\cdot$ .... - dla których n ?

o) $a^n - b^n = (a^2+b^2)\cdot$ .... - dla których n ?

192. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $36^{17} - 5^{17}$.

193. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{17} + 5^{17}$.

194. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $3^{33} - 2^{22}$.

195. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $6^{22} + 5^{22}$.

196. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $17^{26} - 2^{26}$.

197. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $2^{21} - 1$ mniejszy od 100.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

198. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{21}-1$ mniejszy od 100.

199. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51}-2^{51}$ mniejszy od 100.

200. Wskaż nieparzysty dzielnik pierwszy liczby $3^{51}+1$ mniejszy od 100.

201. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{25}-1$.

202. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{25}+1$.

203. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $2^{35}+1$.

204. Wskaż dwucyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{49}+1$.

205. Wskaż trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby $2^{77}-1$.

206. Wskaż dwa dwucyfrowe dzielniki pierwsze liczby $3^{136}-2^{136}$.

207. Dana jest liczba $x\neq 0$. Wyraź liczbę $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ za pomocą liczby $A=x+\dfrac{1}{x}$.

208. Dana jest liczba $x\neq 0$. Wyraź liczbę $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ za pomocą liczby $A=x+\dfrac{1}{x}$.

209. Dana jest liczba $x\neq 0$. Wyraź liczbę $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ za pomocą liczby $A=x+\dfrac{1}{x}$.

210. Dana jest liczba $x\neq 0$. Wyraź liczbę $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ za pomocą liczby $A=x+\dfrac{1}{x}$.

211. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z. Wyraź liczbę $x^2+y^2+z^2$ za pomocą liczb $S=x+y+z$ oraz $P=xy+yz+zx$.

212. Dane są liczby rzeczywiste x, y. Wyraź liczbę x^3+y^3 za pomocą liczb $S=x+y$ oraz $P=xy$.

213. Dane są liczby rzeczywiste x, y. Wyraź liczbę x^4+y^4 za pomocą liczb $S=x+y$ oraz $P=xy$.

214. W tym i kolejnych dwóch zadaniach dla ustalonych liczb rzeczywistych x, y oraz liczby naturalnej n definiujemy

$$S_n=(x+y)^n+(-x)^n+(-y)^n\,.$$

Wyraź S_4 za pomocą S_2.

215. Wyraź S_5 za pomocą S_2 i S_3.

216. Wyraź S_7 za pomocą S_2 i S_3.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Wielokąty opisane na okręgu

217. Na płaszczyźnie dane są dwie różne proste k i l oraz punkt A, który nie leży na żadnej z nich. Uzupełnij zdanie: Punkt A jest równoodległy od prostych k i l wtedy i tylko wtedy, gdy pewien okrąg o środku .... jest .... do prostych k i l.

218. Na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty płaszczyzny równoodległe od tych prostych?

219. Na płaszczyźnie dane są trzy parami przecinające się proste. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty płaszczyzny równoodległe od tych trzech prostych?

220. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\measuredangle AOB = \measuredangle ACB + 60^\circ .$$

Wyznacz miarę kąta ACB.

221. Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)

a) 1, 3, 10, 15

b) 2, 4, 10, 15

c) 3, 27, 10, 15

d) 4, 30, 10, 15

222. Wyznacz położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

223. Wykaż, że dla czworokąta wypukłego o bokach długości a, b, c, d (z zachowaniem kolejności) opisanego na okręgu zachodzi równość

$$a+c=b+d .$$

224. Dany jest czworokąt wypukły o bokach a, b, c, d (z zachowaniem kolejności). Okrąg o, zawarty w czworokącie, jest styczny do trzech boków czworokąta, a mianowicie do boków długości a, b, c, oraz nie ma punktów wspólnych z czwartym bokiem. Która liczba jest większa $a+c$ czy $b+d$?
Wskazówka: Poprowadź styczne do okręgu wychodzące z końców boku długości d.

225. W czworokącie wypukłym o bokach a, b, c, d (z zachowaniem kolejności) zachodzi równość

$$a+c=b+d .$$

Czy stąd wynika, że w ten czworokąt można wpisać okrąg?

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

226. Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

227. Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznacz położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

228. Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykaż, że wówczas

$$b+d<a+c+e\,.$$

229. Wykaż, że dla sześciokąta wypukłego o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a+c+e=b+d+f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym)[1] na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokaż na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny)[1].

230. Rozstrzygnij, dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie: Każdy n-kąt równoboczny opisany na okręgu jest foremny.

231. Rozstrzygnij, dla których liczb naturalnych $n\geqslant 3$ prawdziwe jest następujące twierdzenie: Każdy n-kąt równokątny opisany na okręgu jest foremny.

232. Pole dowolnego wielokąta o obwodzie p opisanego na okręgu o promieniu r jest równe S. Czy powyższe zdanie jest prawdziwe dla

a) $p=12$, $r=1$, $S=6$

b) $p=16$, $r=2$, $S=18$

c) $p=20$, $r=3$, $S=30$

d) $p=24$, $r=4$, $S=50$

e) $p=28$, $r=5$, $S=70$

233. Jeśli w poprzednim zadaniu udzielił(a/e)ś 3 odpowiedzi TAK i 2 odpowiedzi NIE, rozwiąż je ponownie, tym razem poprawnie.

Powyższe zadania są przeznaczone na obóz dla uniwersyteckich klas siódmych, który odbędzie się w dniach 21-25 stycznia 2019 r.

Niektóre z powyższych zadań zostaną omówione na Seminarium OMJ w dniu 12 stycznia 2019 r.

[1]niepotrzebne skreślić

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku