Niezmienniki (zaczniemy na kółku 13 lutego 2019)

234. W każdym polu prostokątnej tablicy o wymiarach 8×9 napisano liczbę całkowitą dodatnią. Udowodnij, że w pewnym rzędzie poziomym lub pionowym suma napisanych liczb jest parzysta.

235. W każdym polu kwadratowej tablicy o wymiarach 9×9 znajduje się żarówka. Na każdej wewnętrznej krawędzi (tzn. wspólnym boku dwóch pól) znajduje się przełącznik, który zmienia stan (zgaszona/zapalona) żarówek na obu polach sąsiadujących z tą krawędzią. Początkowo jedna żarówka jest zapalona, a pozostałe zgaszone. Udowodnij, że korzystając z dostępnych przełączników, nie można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie żarówki są zgaszone.

236. Dany jest 13-kąt foremny. Czy można w taki sposób narysować niektóre przekątne tego 13-kąta, aby z każdego jego wierzchołka wychodziły dokładnie trzy narysowane przekątne?

237. Na potrzeby tego zadania zbiór składający się z co najmniej trzech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *idealnym*, jeżeli największa liczba do niego należąca jest sumą jego pozostałych elementów. Na przykład zbiór $\{1,2,3\}$ jest idealny, bo $3=1+2$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną $n>3$, dla której zbiór $\{1,2,3,\ldots,n\}$ można podzielić na zbiory idealne.

238. Na tablicy napisano liczby od 1 do 100. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczby $a+1$ i $b-1$. Czy wykonując dozwolone ruchy można doprowadzić do tego, że wszystkie liczby napisane na tablicy będą równe?

239. Na tablicy napisano liczby od 1 do 50. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $|a-b|$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Czy może to być liczba 0?

240. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

241. Na tablicy napisano 2019 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczby $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Wykonujemy dozwolone ruchy, po czym okazuje się, że wszystkie liczby na tablicy są równe. Jakie to mogą być liczby?

242. Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach elementów?

243. Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2019\}$ można podzielić na trzy zbiory o równych sumach kwadratów elementów?

244. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od -2019 do 2019. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab+a+b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?
Wskazówka: Dla oswojenia się z zadaniem zbadaj, co będzie, jeśli początkowo na tablicy będzie 5 liczb od -2 do 2 lub 7 liczb od -3 do 3.

Zadania na spotkanie olimpijskie dla uczniów i nauczycieli 23.02.2019 (sobota), godz. 10:00 Instytut Matematyczny UWr, sala WS

245. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od 1 do 2019. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab+a+b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Udowodnij, że ta liczba nie zależy od wykonywanych ruchów. Co to za liczba?

246. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z trzech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą trójwyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2016,2017,2018,2020\}$ złożony z liczb od 1 do 2018 oraz liczby 2020, można podzielić na 673 fajne zbiory?

247. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z czterech liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą czterowyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c,d\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b=d-c$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2017,2018,2019,2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021, można podzielić na 505 fajnych zbiorów?

248. Na potrzeby tego zadania zbiór złożony z pięciu liczb całkowitych dodatnich nazwiemy *fajnym*, jeżeli jego elementy tworzą pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny.
Inaczej: zbiór $\{a,b,c,d,e\}$ jest *fajny*, jeżeli $b-a=c-b=d-c=e-d$.

Czy zbiór $\{1,2,3,\ldots,2017,2018,2019,2021\}$ złożony z liczb od 1 do 2019 oraz liczby 2021, można podzielić na 404 fajne zbiory?

249. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $a+b+2\sqrt{ab}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?

250. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $\frac{ab}{a+b}$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka to może być liczba?