

Część zadań z tej listy będzie przedmiotem spotkania olimpijskiego
w dniu 23 marca 2019 r.

Zadania są bardzo różnej trudności,
niektóre mogą być dostępne tylko dla najlepszych uczniów.

Nierówność między średnimi (arytmetyczną i geometryczną)

Przypomnienie:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad \text{czyli} \quad xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Uwaga: W powyższej nierówności (i niektórych następnych) założenie dodatniości liczb nie jest istotne, dokładamy je jednak, aby móc swobodnie używać pojęcia średniej geometrycznej.

Definicja: Średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Definicja: Średnią geometryczną liczb dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy liczbę

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}.$$

Naszym celem jest udowodnienie dla wybranych wartości n nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Inna wersja:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}\right)^n.$$

Innymi słowy, iloczyn n liczb rzeczywistych dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

Uwaga: W powyższych nierównościach równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ są równe.

251. Nierówność między średnimi dla 4 liczb. (Zadanie 4 z warsztatów OMJ 20.10.2018) Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{xyzt} \leq \frac{x+y+z+t}{4}, \quad \text{czyli} \quad xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4.$$

252. Nierówność między średnimi dla 8 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h zachodzi nierówność

$$\sqrt[8]{abcdefgh} \leq \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8},$$

czyli

$$abcdefgh \leq \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8} \right)^8.$$

253. Nierówność między średnimi dla 3 liczb, z których dwie najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x \leq y$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{x^2y} \leq \frac{2x+y}{3}.$$

Wskazówka: Oznacz $r = y - x \geq 0$ i podstaw $y = x + r$.

254. Nierówność między średnimi dla 3 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

Wskazówka: Załóż, że $x \leq y \leq z$ i skorzystaj z nierówności między średnimi dla liczb x i y .

255. Nierówność między średnimi dla 6 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt[6]{abcdef} \leq \frac{a+b+c+d+e+f}{6}.$$

256. Nierówność między średnimi dla 9 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[9]{abcdefghi} \leq \frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

257. Nierówność między średnimi dla 5 liczb, z których cztery najmniejsze są równe. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x \leq y$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{x^4y} \leq \frac{4x+y}{5}.$$

258. Nierówność między średnimi dla 5 liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z, s, t zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{xyzst} \leq \frac{x+y+z+s+t}{5}.$$

259. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b \leq 2a^3 + b^3.$$

260. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3.$$

261. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$3a^2b \leq a^3 + 4b^3.$$

262. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12a^2b \leq 16a^3 + b^3.$$

263. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$12 \cdot (a^2b + ab^2) \leq 5a^3 + 32b^3.$$

Podaj przykład liczb całkowitych dodatnich a, b , dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

264. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b \leq \frac{a^3 + b^3}{2}.$$

265. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^2b \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot (a^3 + b^3).$$

266. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b + ab^4 \leq a^5 + b^5.$$

267. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^3b^2 + a^2b^3 \leq a^5 + b^5.$$

268. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^4b + a^2b^3 \leq a^5 + b^5.$$

269. Prostopadłościan ma pole powierzchni całkowitej równe P , a jego objętość jest równa V . Udowodnij, że

$$V^2 \leq \frac{P^3}{216}.$$

270. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x \leq x^5 + 4.$$

271. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność

$$5x^3 \leq 3x^5 + 2.$$

272. Udowodnij nierówność $\sqrt[10]{2} < \frac{11}{10}$.

273. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)^3 \cdot (n+3) \cdot (n+4) < (n+2)^5.$$

274. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2) \cdot n^6 \cdot (n+2) < (n-1)^4 \cdot (n+1)^4.$$

275. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

276. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e, f spełniają warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Udowodnij, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab < 8.$$

277. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$27 \cdot (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \leq 8 \cdot (a+b+c)^3.$$

278. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$8abc \leq (a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a).$$

279. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$24abcd \leq (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

280. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$81abcd \leq 4 \cdot (a+d) \cdot (b+d) \cdot (c+d) \cdot (a+b+c).$$

W każdym z kolejnych 12 zadań podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego największą wartość wyrażenia przy a , b i ewentualnie c przebiegających liczby całkowite dodatnie oraz podaj przykład pary/trójki liczb całkowitych dodatnich a , b i ewentualnie c , dla której ta największa wartość jest osiągana.

281. $\max \frac{ab}{a^2 + 4b^2} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

282. $\max \frac{ab}{4a^2 + 9b^2} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

283. $\max \frac{abc}{a^3 + b^3 + 8c^3} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

284. $\max \frac{abc}{a^3 + 8b^3 + 27c^3} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

285. $\max \frac{abc}{a^2 + 8b^4 + 8c^4} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

286. $\max \frac{abc}{8a^2 + b^4 + c^4} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

287. $\max \frac{abc}{3a^2 + 2b^3 + 64c^6} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

288. $\max \frac{abc}{3a^2 + 16b^3 + c^6} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, $c = \dots\dots\dots$

289. $\max \frac{ab^2}{4a^3 + b^3} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

290. $\max \frac{ab^3}{27a^4 + b^4} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

291. $\max \frac{a^2 b^3}{a^5 + 48b^5} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

292. $\max \frac{ab}{a^3 + b^3 + 64} = \dots\dots\dots$ dla $a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

W każdym z kolejnych 8 zadań podaj parę liczb rzeczywistych dodatnich x i y , dla której podane wyrażenie osiąga największą wartość.

293. $\max \frac{xy}{x^2 + y^3 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

294. $\max \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

295. $\max \frac{xy}{x^2 + y^5 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

296. $\max \frac{xy}{x^3 + y^5 + 1}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

297. $\max \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^6 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

298. $\max \frac{x^2 y^2}{x^8 + y^8 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

299. $\max \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^5 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$

300. $\max \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^7 + xy}$ jest osiągane dla $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$
