Jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze I

1. W Biwerlandii w obiegu są monety o nominałach 5 eciepecie i 8 eciepecie. Jaką najmniejszą (dodatnią) kwotę można zapłacić za zakupy, jeżeli sprzedawca może wydawać resztę?

2. To samo pytanie, gdy w obiegu są monety 16 i 26 eciepecie.

3. To samo pytanie, gdy w obiegu są monety 39 i 102 eciepecie.

4. W obiegu są monety o nominałach m eciepecie i n eciepecie, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi. Ponadto wiadomo, że $m<n$ oraz liczba n nie jest podzielna przez m. Uzasadnij, że można zapłacić pewną kwotę (dodatnią) mniejszą od m eciepecie.

5. W obiegu są monety o nominałach m eciepecie i n eciepecie, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech k będzie najmniejszą kwotą dodatnią, jaką można zapłacić. Uzasadnij, że liczby m i n są podzielne przez k.

6. W obiegu są monety o nominałach p eciepecie i n eciepecie, gdzie p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą całkowitą dodatnią niepodzielną przez p. Uzasadnij, że można zapłacić za zakupy warte 1 eciepecie.

7. Liczba p jest pierwsza, a liczba całkowita dodatnia n jest niepodzielna przez p. Uzasadnij istnienie takiej liczby całkowitej dodatniej m, że liczba mn daje resztę 1 przy dzieleniu przez p.

8. Liczby całkowite dodatnie m i n są niepodzielne przez liczbę pierwszą p. Udowodnij, że liczba mn jest niepodzielna przez p.
Wskazówka: Istnieją takie a i b, że ma i nb dają przy dzieleniu przez p resztę 1, wobec czego $mnab$ ...

9. Iloczyn mn liczb całkowitych dodatnich jest podzielny przez liczbę pierwszą p. Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez p.

10. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze.

Jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze II

11. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich m, n spełniające warunek

$$m^2n^3=2^7\cdot 3^{11}\cdot 5^5\,.$$

Podaj największy wspólny dzielnik liczb.

12. $\mathrm{NWD}(16^{16},20^{20})$ **13.** $\mathrm{NWD}(24^{24},27^{27})$ **14.** $\mathrm{NWD}(48^{48},54^{54})$

15. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez 6^{1000}. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 6?

16. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez 8. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 4?

17. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez $5^3\cdot 3^5$. Dla jakiej największej liczby całkowitej d możemy stąd wywnioskować, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d?

18. Iloczyn mn (liczb całkowitych dodatnich) jest podzielny przez $19^3\cdot 7^5$. Dla jakiej największej liczby całkowitej d możemy stąd wywnioskować, że co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d?

19. Wskaż możliwie najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której liczba $45^{45}\cdot k$ jest kwadratem liczby całkowitej.

20. Wskaż możliwie najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której liczba $20^{20}\cdot k$ jest sześcianem liczby całkowitej.

21. Wskaż możliwie najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której liczba $28^{28}\cdot k$ jest sześcianem liczby całkowitej.

22. Ile jest takich liczb całkowitych dodatnich $n\leqslant 100$, że liczba n^n jest kwadratem liczby całkowitej?

23. Ile jest takich liczb całkowitych dodatnich $n\leqslant 100$, że liczba n^n jest sześcianem liczby całkowitej?

Zadania na kolorowanie, podziały figur

24. Czy szachownicę 8×8 z usuniętymi dwoma przeciwległymi polami narożnymi można pokryć kostkami domina o wymiarach 1×2 ?

25. Pola planszy są kwadratami jednostkowymi. Dwa pola mogą mieć wspólny bok, wspólny wierzchołek lub też mogą nie mieć punktów wspólnych. Z każdego pola można dojść na każde inne ruchem wieży. Pola planszy są pomalowane na biało i czarno, przy czym pola sąsiadujące bokiem mają różne kolory. Pól białych jest tyle samo, co czarnych. Czy stąd wynika, że planszę można pokryć kostkami domina o wymiarach 1×2 ?

26. Plansza (jak w zadaniu poprzednim) ma 10 pól (5 białych i 5 czarnych). Czy stąd wynika, że na planszy można położyć "po kratkach" 4 kostki domina o wymiarach 1×2 ?

27. Plansza (jak w zadaniach poprzednich) ma 10 pól (5 białych i 5 czarnych). Czy stąd wynika, że planszę można pokryć sześcioma paskami papieru o wymiarach 1×2 ?

Paski papieru muszą być ułożone "po kratkach" i nie mogą wystawać poza planszę, ale mogą na siebie nachodzić (czyli jedno pole może być pokryte wielokrotnie).

28. Szachownicę 8×8 pokryto kostkami domina o wymiarach 1×2. Udowodnij, że kostek ułożonych poziomo jest parzyście wiele.

Kostka ułożona poziomo to kostka, której dłuższy bok jest równoległy do dolnego boku szachownicy.

29. Szachownicę 6×6 pokryto kostkami domina o wymiarach 1×2. Udowodnij, że szachownicę można podzielić na dwa prostokąty tak, aby linia podziału nie rozcinała żadnej kostki domina.

30. Czy szachownicę 8×8 z usuniętym polem narożnym można pokryć klockami triomina o wymiarach 1×3 ?

31. Czy szachownicę 10×10 można pokryć klockami tetromina o wymiarach 1×4 ?

32. Czy szachownicę 19×19 z usuniętym polem narożnym można pokryć klockami pentomina o wymiarach 1×5 ?

33. Czy szachownicę 19×19 z usuniętym centralnym polem można pokryć klockami pentomina o wymiarach 1×5 ?

Układy równań

Rozwiąż podane układy równań w liczbach rzeczywistych x, y.

34. $\begin{cases} 2x+3y = 19 \\ 3x+2y = 16 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2x^2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x = y^3 \\ y = 3x^3 \end{cases}$

37. $\begin{cases} y = x^2 \\ y+7 = (x+1)^2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x+y = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^3+y^3 = 0 \\ x^4+y^4 = 8 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x^2 = 2y^3 \\ x^3 = 2y^5 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^3 = 2y^5 \\ x^5 = 2y^7 \end{cases}$

Rozwiąż podane układy równań w liczbach rzeczywistych x, y, z.

42. $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ x+2y+3z = 14 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 3y^2 \\ x = 5z^2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} y = 2x^2 \\ z = 2y^3 \\ x = 2z^5 \end{cases}$

45. $\begin{cases} y^2 = 2x^3 \\ z^3 = 2y^5 \\ x^5 = 2z^7 \end{cases}$

Wyznacz takie różne liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniające podany układ równań, aby suma $a+b+c$ była możliwie najmniejsza.

46. $\begin{cases} b^2-a^2 = c^2-b^2 \\ b-a = 2(c-b) \end{cases}$

47. $\begin{cases} b^2-a^2 = c^2-b^2 \\ 2(b-a) = 3(c-b) \end{cases}$

48. $\begin{cases} a^2+b^2 = c^2 \\ b-a = c-b \end{cases}$

49. $\begin{cases} a^2+ab+b^2 = c^2 \\ b-a = c-b \end{cases}$

Zasada szufladkowa Dirichleta

50. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 61 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o 2.

51. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o 1.

52. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o $\sqrt{2}$.

53. Przy założeniach jak wyżej udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt prostokątny.

54. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 41 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne dwa czerwone punkty są odległe o $\sqrt{3}$.

55. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewne 42 wierzchołki tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt mający co najmniej jeden kąt $60°$.

56. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 50 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt mający co najmniej jeden kąt $72°$.

57. Dany jest 120-kąt foremny wpisany w okrąg o promieniu 1. Pewnych 81 wierzchołków tego 120-kąta pomalowano na czerwono. Udowodnij, że pewne trzy czerwone punkty wyznaczają trójkąt równoboczny.

58. Dana jest liczba naturalna $n>1$ oraz liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$. Udowodnij istnienie takich liczb całkowitych dodatnich $i\neq j$ nie większych od $n+1$, że liczba a_i-a_j jest podzielna przez n.

59. Dana jest liczba naturalna $n>1$ oraz liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n+1}$. Udowodnij istnienie takich różnych liczb całkowitych dodatnich i, j, k nie większych od $2n+1$, że liczba $(a_i-a_j)^2+(a_j-a_k)^2+(a_k-a_i)^2$ jest podzielna przez n.

60. Pewnych 8 wierzchołków 55-kąta foremnego pomalowano na czerwono, a następnie każde dwa czerwone punkty połączono odcinkiem. Udowodnij, że pewne dwa narysowane odcinki mają taką samą długość.

61. Pewnych 11 wierzchołków 55-kąta foremnego pomalowano na czerwono, a następnie każde dwa czerwone punkty połączono odcinkiem. Udowodnij, że pewne trzy narysowane odcinki mają taką samą długość.

62. Wewnątrz kwadratu o boku 10 wybrano 101 punktów. Udowodnij, że pewne dwa z tych punktów są odległe o mniej niż $3/2$.

63. Na płaszczyźnie zaznaczono 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać takie dwa z nich, że środek odcinka, który je łączy, jest punktem kratowym.

Punktem kratowym nazywamy punkt o obu współrzędnych całkowitych – na papierze w kratkę punktami kratowymi są naroża kratek.

Kongruencje

Definicja: Niech $m>0$, a, b będą liczbami całkowitymi. Powiemy, że a przystaje do b modulo m, co zapisujemy

$$a\equiv b \pmod{m},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a-b$ jest podzielna przez m.

64. Udowodnij, że jeżeli $a\equiv b \pmod{m}$ oraz $c\equiv d \pmod{m}$, to

$$a+c\equiv b+d \pmod{m}.$$

65. Przy tych samych założeniach udowodnij, że $ac\equiv bd \pmod{m}$.

66. Udowodnij, że jeżeli $a\equiv b \pmod{m}$ oraz $a\equiv b \pmod{n}$, gdzie m, n są względnie pierwsze, to

$$a\equiv b \pmod{mn}.$$

67. Udowodnij, że jeżeli $a\equiv b \pmod{m}$ oraz $a\equiv b \pmod{n}$, to

$$a\equiv b \pmod{\mathrm{NWW}(m,n)}.$$

68. Udowodnij, że jeżeli $ac\equiv bc \pmod{m}$, gdzie liczby m, c są względnie pierwsze, to $a\equiv b \pmod{m}$.

69. Oblicz resztę z dzielenia iloczynu $207\cdot 307\cdot 407\cdot 507$ przez 101.

70. Oblicz resztę z dzielenia liczby 3^{16} przez 17.

71. Oblicz resztę z dzielenia liczby 3^{48} przez 11.

72. Połącz liczby od 2 do 9 w pary (a,b) spełniające warunek $ab\equiv 1 \pmod{11}$.

73. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 10! przez 11.

74. Połącz liczby od 2 do 11 w pary (a,b) spełniające warunek $ab\equiv 1 \pmod{13}$.

75. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 12! przez 13.

76. Połącz liczby od 2 do 15 w pary (a,b) spełniające warunek $ab\equiv 1 \pmod{17}$.

77. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 16! przez 17.

78. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, m, że liczby a^3+b^3 oraz a^5+b^5 są podzielne przez m. Udowodnij, że liczba $a^{11}+b^{11}$ jest podzielna przez m.

79. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, m, że liczby a^3+b^2 oraz a^5+2b^4 są podzielne przez m. Udowodnij, że liczba $a^{18}-8b^{14}$ jest podzielna przez m.

80. Na potrzeby tego zadania liczbę całkowitą dodatnią m nazwiemy *cudowną*, jeżeli dla każdych liczb całkowitych spełniających warunek

$$a^2\equiv b^2 \pmod{m}$$

zachodzi

$$a\equiv b \pmod{m} \qquad \text{lub} \qquad a\equiv -b \pmod{m}.$$

Które liczby są cudowne, a które nie?