

1. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$4ab + 6ac + 12bc \leq 13a^2 + 10b^2 + 5c^2.$$

3. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$15ab + 21ac + 35bc \leq 37a^2 + 29b^2 + 17c^2.$$

4. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych nieujemnych  $x, y, z, t$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{xyzt} \leq \frac{x+y+z+t}{4}, \quad \text{czyli} \quad xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4.$$

5. Bez wykonywania bezpośrednich obliczeń udowodnij, że

$$2^{11} < 3^7.$$

*Wskazówka:* 8, 8, 8, 12.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+9) < (n+3)^4.$$

7. Liczby rzeczywiste nieujemne  $a, b, c$  spełniają warunek

$$a + b + c = 3.$$

Udowodnij, że

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

8. Liczby rzeczywiste nieujemne  $a, b, c, d$  spełniają warunek

$$a + b + c + d = 4.$$

Udowodnij, że

$$ab + bc + cd + da \leq 4.$$

9. Liczby rzeczywiste nieujemne  $a, b, c, d, e, f$  spełniają warunek

$$a + b + c + d + e + f = 6.$$

Udowodnij, że

$$ab + bc + cd + de + ef + fa \leq 9.$$

10. Liczby rzeczywiste nieujemne  $a, b, c, d, e$  spełniają warunek

$$a + b + c + d + e = 5.$$

Udowodnij, że

$$ab + bc + cd + de + ea \leq 6,25.$$