

Spotkanie olimpijskie

Sobota 19 października 2019 r. godz. 10:00–13:00

Instytut Matematyczny UWr sala HS

Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona

W zrozumieniu wykładu pomocne będzie rozwiązanie **przed spotkaniem** poniższych zadań.

Zakładana wiedza i umiejętności:

- znajomość definicji silni oraz umiejętność manipulowania na czynnikach pierwszych silni i wyrażeń powstałych ze wzoru na różnicę kwadratów (zadania **501–510**);
- umiejętność zliczania podzbiorów w prostych przypadkach (zadania **510–515**);
- umiejętność manipulowania prostymi wyrażeniami algebraicznymi i posługiwanie się wzorami skróconego mnożenia (zadania **516–519**);
- znajomość poniższej definicji i prostych własności kongruencji (zadanie **520**):

DEFINICJA: Niech $m > 0$, a , b będą liczbami całkowitymi. Powiemy, że a przystaje do b modulo m , co zapisujemy

$$a \equiv b \pmod{m},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a - b$ jest podzielna przez m .

WŁASNOŚCI: Jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $c \equiv d \pmod{m}$, to

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \quad \text{oraz} \quad ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Zadania wstępne

501. Bez wykonywania obliczeń na dużych liczbach udowodnij, że $6! \cdot 7! = 10!$.

502. Bez wykonywania obliczeń na dużych liczbach udowodnij, że $\sqrt{7! + 1} = 71$.

Wskazówka: Po odpowiednim przekształceniu dowodzonej równości skorzystaj ze wzoru na różnicę kwadratów.

503. Bez wykonywania obliczeń na dużych liczbach udowodnij, że $\sqrt{8! + 81} = 201$.

504. Bez wykonywania obliczeń na dużych liczbach udowodnij, że $\sqrt{5 \cdot 8! + 1} = 449$.

505. Rozstrzygnij, czy liczba $11!$ jest podzielna przez $(6!)^2$.

506. Rozstrzygnij, czy liczba $13!$ jest podzielna przez $(7!)^2$.

507. Rozstrzygnij, czy liczba $15!$ jest podzielna przez $(8!)^2$.

508. Rozstrzygnij, czy liczba $17!$ jest podzielna przez $(9!)^2$.

509. Rozstrzygnij, czy liczba $19!$ jest podzielna przez $(10!)^2$.

510. Rozstrzygnij, czy liczba $29!$ jest podzielna przez $(15!)^2$.

511. Ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru mającego

- a) 4 elementy?
- b) 5 elementów?
- c) 6 elementów?
- d) n elementów?

512. W spotkaniu wzięło udział 15 osób. Każdych dwóch uczestników spotkania wymieniło uścisk dłoni. Następnego dnia odbyło się kolejne spotkanie, podczas którego również każdych dwóch uczestników wymieniło uścisk dłoni. Ile osób spotkało się drugiego dnia, jeśli wiadomo, że drugiego dnia uścisków dłoni było dwa razy więcej niż pierwszego?

513. Ile jest trzelementowych podzbiorów zbioru mającego

- a) 5 elementów?
- b) 6 elementów?
- c) 7 elementów?
- d) 9 elementów?
- e) n elementów?

514. Ile jest czterelementowych podzbiorów zbioru mającego

- a) 6 elementów?
- b) 7 elementów?
- c) 8 elementów?
- d) n elementów?

515. Reklama pizzerii głosi:

Skomponuj własną pizzę na 1001 sposobów – wybierz dowolne cztery dodatki.

Ile dodatków jest dostępnych w tej pizzerii?

516. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta.

517. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 3.

518. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5.

Wskazówki: $n^2 + 1 = n^2 - 4 + 5$, $n^5 - n = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) + 5 \cdot \text{coś}$

519. Przypomnij sobie wzory:

a) $(a + b)^4 = a^4 + \dots a^3b + \dots a^2b^2 + \dots ab^3 + b^4$

b) $(a + b)^5 = a^5 + \dots$

c) $(a + b)^6 = a^6 + \dots$

d) $(a + b)^7 = a^7 + \dots$

520. Dana jest taka liczba naturalna n , że

$$n^2 \equiv 3 \pmod{13} \quad \text{oraz} \quad n^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Oblicz resztę z dzielenia liczby n^{13} przez 13.