

521. Wykaż, że podane wyżej trzy definicje są równoważne, to znaczy

$$\binom{n}{k}_{TP} = \binom{n}{k}_K = \binom{n}{k}_W.$$

Wzór dwumianowy Newtona:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

522. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

523. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

524. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $(2n)!$ jest podzielna przez $(n!)^2$.

525. Udowodnij, że liczba $100!$ jest podzielna przez $50! \cdot 51!$.

526. Uporządkuj w kolejności niemalejącej liczby

$$\binom{2019}{109}, \quad \binom{2019}{409}, \quad \binom{2019}{709}, \quad \binom{2019}{1009}, \quad \binom{2019}{1309}, \quad \binom{2019}{1709}.$$

527. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} < 4 \cdot \binom{2n}{n}.$$

528. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

529. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech $0 < k < p$. Udowodnij, że liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p .

530. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla każdych liczb całkowitych a, b zachodzi

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

531. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że dla każdych liczb całkowitych a, b, c zachodzi

$$(a+b+c)^p \equiv a^p + b^p + c^p \pmod{p}.$$

Zauważ, że powyższy wzór można uogólnić na dowolną liczbę składników.

532. (Małe twierdzenie Fermata) Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

533. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n oraz każdych liczb całkowitych a, b spełniających warunek

$$a \equiv b \pmod{n}$$

zachodzi

$$a^n \equiv b^n \pmod{n^2}.$$

534. Jakie reszty przy dzieleniu przez 9 może dawać sześćian liczby całkowitej?

535. Jakie reszty przy dzieleniu przez 25 może dawać piąta potęga liczby całkowitej?

536. Jakie reszty przy dzieleniu przez 49 może dawać siódma potęga liczby całkowitej?

537. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, e, f, g , że liczba

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 + g^3$$

jest podzielna przez 9. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, d, e, f, g jest podzielna przez 3?

538. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, e , że liczba

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$$

jest podzielna przez 25. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 5?

539. Dane są takie liczby całkowite a, b, c , że liczba

$$a^7 + b^7 + c^7$$

jest podzielna przez 49. Czy stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest podzielna przez 7?

540. Na okręgu wybrano n punktów, a następnie poprowadzono wszystkie cięciwy o końcach w wybranych punktach. Okazało się, że żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie (nie licząc końców cięciw). Na ile obszarów zostało podzielone koło ograniczone rozważanym okręgiem, jeżeli $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$? Dla której liczby n koło zostanie podzielone na 256 obszarów?