

Spotkanie olimpijskie

Sobota 7 grudnia 2019 r. godz. 10:00–13:00

Instytut Matematyczny UWr sala HS

Zabawy z pierwiastkami

W zrozumieniu wykładu pomocne będzie rozwiązanie **przed spotkaniem** poniższych zadań.

Zakładana wiedza i umiejętności:

- rozumienie niewymierności pierwiastków kwadratowych i konsekwencji prostych manipulacji na tych pierwiastkach (zadania **541–553** — szczegółowe ich rozwiązanie nie jest konieczne, ale będę zakładać znajomość faktów, których dowód jest przedmiotem tych zadań);
- umiejętność prostych manipulacji na pierwiastkach sześciennych (zadanie **554**);
- umiejętność znajdowania całkowitoliczbowych rozwiązań równań kwadratowych i sześciennych oraz wyłączania z wielomianów sześciennych czynnika liniowego — ”ręcznie” w najprostszych przykładach, bez ogólnego algorytmu (zadania **555–560**).

Zadania wstępne

541. Udowodnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

542. Udowodnij, że liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.

543. Udowodnij, że liczba $\sqrt{6}$ jest niewymierna.

544. Udowodnij, że jeżeli liczba naturalna n nie jest kwadratem liczby całkowitej, to liczba $\sqrt{n}$ jest niewymierna.

545. Udowodnij, że jeżeli a, b, c, d są liczbami wymiernymi spełniającymi równość

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2},$$

to $a = c$ oraz $b = d$.

546. Udowodnij, że jeżeli N jest liczbą niewymierną, natomiast a, b, c, d są liczbami wymiernymi spełniającymi równość

$$a + bN = c + dN,$$

to $a = c$ oraz $b = d$.

547. Udowodnij, że jeżeli a, b, c, d, x, y są liczbami wymiernymi spełniającymi równość

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2},$$

to

$$(a - b\sqrt{2}) + (c - d\sqrt{2}) = x - y\sqrt{2}.$$

548. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią niebędącą kwadratem liczby całkowitej, a liczby wymierne a, b, c, d, x, y spełniają równość

$$(a + b\sqrt{n}) + (c + d\sqrt{n}) = x + y\sqrt{n},$$

to

$$(a - b\sqrt{n}) + (c - d\sqrt{n}) = x - y\sqrt{n}.$$

549. Udowodnij, że jeżeli a, b, c, d, x, y są liczbami wymiernymi spełniającymi równość

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2},$$

to

$$(a - b\sqrt{2}) \cdot (c - d\sqrt{2}) = x - y\sqrt{2}.$$

550. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią niebędącą kwadratem liczby całkowitej, a liczby wymierne a, b, c, d, x, y spełniają równość

$$(a + b\sqrt{n}) \cdot (c + d\sqrt{n}) = x + y\sqrt{n},$$

to

$$(a - b\sqrt{n}) \cdot (c - d\sqrt{n}) = x - y\sqrt{n}.$$

551. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią niebędącą kwadratem liczby całkowitej, a liczby wymierne a, b, x, y oraz liczba całkowita dodatnia k spełniają równość

$$(a + b\sqrt{n})^k = x + y\sqrt{n},$$

to

$$(a - b\sqrt{n})^k = x - y\sqrt{n}.$$

552. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą dodatnią niebędącą kwadratem liczby całkowitej, a liczby wymierne a, b, c, d, x, y spełniają równość

$$\frac{a + b\sqrt{n}}{c + d\sqrt{n}} = x + y\sqrt{n},$$

przy czym $c + d\sqrt{n} \neq 0$, to

$$\frac{a - b\sqrt{n}}{c - d\sqrt{n}} = x - y\sqrt{n}.$$

553. Wiedząc, że

$$(1 + \sqrt{2})^{10} = 3363 + 2378\sqrt{2},$$

podaj takie liczby całkowite a i b , że

$$(1 - \sqrt{2})^{10} = a + b\sqrt{2}.$$

554. Niech $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$. Zapisz liczbę x^3 w postaci $a + bx\sqrt[3]{c}$, gdzie liczby a, b i c są całkowite dodatnie, a przy tym liczba c jest możliwie najmniejsza.

555. Zapisz równanie

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

w postaci

$$(x + a)^2 + b = 0,$$

gdzie liczby a i b są całkowite (niekoniecznie dodatnie), a następnie wykorzystaj tę postać do wyznaczenia rozwiązań danego równania.

556. Zapisz równanie

$$x^2 - 8x + 17 = 0$$

w postaci

$$(x + a)^2 + b = 0,$$

gdzie liczby a i b są całkowite (niekoniecznie dodatnie), a następnie wykorzystaj tę postać do wykazania, że dane równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych.

557. Zapisz równanie

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

w postaci

$$(x + a)^2 + b = 0,$$

gdzie liczby a i b są całkowite (niekoniecznie dodatnie), a następnie wykorzystaj tę postać do wyznaczenia rozwiązań danego równania.

558. Zapisz równanie

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

w postaci

$$x \cdot (x^2 + ax + b) = c,$$

gdzie liczby a , b i c są całkowite (niekoniecznie dodatnie). Wywnioskuj stąd, że jeżeli liczba całkowita x spełnia to równanie, to musi być dzielnikiem liczby c . Wykorzystaj tę obserwację do zgadnięcia trzech rozwiązań danego równania.

559. Zapisz równanie

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

w postaci

$$(x - 1) \cdot (x^2 + ax + b) = 0,$$

gdzie liczby a i b są całkowite (niekoniecznie dodatnie), a następnie wykorzystaj tę postać do wskazania rozwiązania danego równania i wykazania, że równanie nie ma innych rozwiązań rzeczywistych.

560. Zapisz równanie

$$x^3 - x - 6 = 0$$

w postaci

$$(x - 2) \cdot (x^2 + ax + b) = 0,$$

gdzie liczby a i b są całkowite (niekoniecznie dodatnie), a następnie wykorzystaj tę postać do wskazania rozwiązania danego równania i wykazania, że równanie nie ma innych rozwiązań rzeczywistych.