

Zabawy z pierwiastkami

561. Zapisz wyrażenie

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

562. Zapisz wyrażenie

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+4}$$

w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

563. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

564. Jaka cyfra występuje bezpośrednio po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$(1+\sqrt{2})^{2019} ?$$

565. Rozstrzygnij, czy liczba

$$41 + 29\sqrt{2}$$

jest sumą kwadratów 2019 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

566. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

567. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

568. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m i n spełniające równanie

$$(1 + \sqrt{2})^m = (1 + 2\sqrt{2})^n.$$

569. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m , n i k spełniające równanie

$$(1 + \sqrt{3})^m = (1 + 2\sqrt{3})^n \cdot (1 + 3\sqrt{3})^k.$$

570. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m , n i k spełniające równanie

$$(1 + \sqrt{5})^m = (2 + \sqrt{5})^n + (3 + \sqrt{5})^k.$$

571. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m , n i k spełniające równanie

$$(1 + \sqrt{5})^m = (1 + 2\sqrt{5})^n \cdot (1 + 3\sqrt{5})^k.$$

572. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m , n i k spełniające równanie

$$(5 + \sqrt{7})^m = (4 + \sqrt{7})^n \cdot (1 + \sqrt{7})^k.$$

573. Wiadomo, że 36 kulek można ułożyć na stole w kwadrat lub w trójkąt równoboczny, mamy bowiem

$$36 = 6^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich par liczb naturalnych m , n , że

$$m^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Podaj kilka przykładów takich liczb m i n (oprócz $m = n = 1$ i powyższego $m = 6$, $n = 8$).