Zabawy z pierwiastkami

574. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że
$$7\pm 4\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2, \qquad 2\pm\sqrt{3}>0\,.$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:
$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(7+4\sqrt{3}\right)=16\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 4.

575. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że
$$9\pm 4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\pm 2\right)^2, \qquad \sqrt{5}\pm 2>0\,.$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:
$$\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2=\left(9-4\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(9+4\sqrt{5}\right)=20\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{20}$.

576. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$5\pm2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2, \qquad \sqrt{3}\pm\sqrt{2}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=$$
$$=2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2=\left(5-2\sqrt{6}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(5-2\sqrt{6}\right)=12\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{12}$.

577. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$11\pm2\sqrt{30}=\left(\sqrt{6}\pm\sqrt{5}\right)^2, \qquad \sqrt{6}\pm\sqrt{5}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{6}=\sqrt{24}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}\right)^2=\left(11-2\sqrt{30}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(11+2\sqrt{30}\right)=24\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{24}$.

578. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(2+\sqrt{3}\right)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{6}$.

579. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$4\pm\sqrt{15}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2=\left(4-\sqrt{15}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(4+\sqrt{15}\right)=10\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{10}$.

580. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$6\pm\sqrt{35}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^2=\left(6-\sqrt{35}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(6+\sqrt{35}\right)=14\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{14}$.

581. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$3\pm\sqrt{5}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2=\left(3-\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{4}+\left(3+\sqrt{5}\right)=10\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{10}$.

582. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$4\pm\sqrt{7}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2=\left(4-\sqrt{7}\right)+2\cdot\sqrt{9}+\left(4+\sqrt{7}\right)=14\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{14}$.

583. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Zauważmy, że

$$3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2, \qquad \sqrt{2}-1>0\,,$$

$$5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2, \qquad \sqrt{3}-\sqrt{2}>0\,,$$

$$7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2, \qquad 2-\sqrt{3}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=2-1=1\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

584. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Zauważmy, że

$$2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,,$$

$$4-\sqrt{15}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}>0,$$

$$6-\sqrt{35}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}>0,$$

$$8-3\sqrt{7}=\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{2}$.

585. Jaka cyfra występuje bezpośrednio po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2020} ?$$

Zapiszmy daną w zadaniu liczbę w postaci

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2020}=a+b\sqrt{2},$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2020}=a-b\sqrt{2},$$

skąd

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2020}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2020}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2020}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}=2a.$$

Ponieważ $2a$ jest liczbą całkowitą, a liczba $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}$ jest dodatnia, przy czym

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}=\frac{1}{2^{2020}}<\frac{1}{2^4}<\frac{1}{10},$$

wnioskujemy stąd, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2020}$ po przecinku występuje cyfra 9 (a nawet wiele dziewiątek, jeśli oszacować $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}$ przez odwrotność wyższej potęgi dziesiątki).

586. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^{m}=\left(4+\sqrt{7}\right)^{n}\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)^{k}.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)^k \qquad (1)$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z równania (1) wynika

$$\left(1-\sqrt{7}\right)^m=\left(4-\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(5-\sqrt{7}\right)^k,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (1) prowadzi do równania

$$(-6)^m=9^n\cdot 18^k,$$

skąd

$$6^m=9^n\cdot 18^k. \qquad (2)$$

Jednak równanie (2) nie ma rozwiązań, gdyż dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i k jego lewa strona ma w rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo dwójek, co trójek, podczas gdy po prawej stronie występuje więcej trójek niż dwójek.

587. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{5}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3=$$

$$=\left(2-\sqrt{5}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)=4-3x.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3+3x-4=0.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=1$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

588. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$9\pm 4\sqrt{5}=\left(\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=3 .$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^3=$$

$$=\left(9-4\sqrt{5}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)+\left(9+4\sqrt{5}\right)=18+3x .$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-18=0 .$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=3$, a ponadto

$$x^3-3x-18=(x-3)\cdot\left(x^2+3x+6\right)=(x-3)\cdot\left((x+3/2)^2+27/4\right) ,$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 3.

589. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$2\sqrt{7}\pm 3\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)+\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)=4\sqrt{7}+3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-4\sqrt{7}=0\,.$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=\sqrt{7}$, a ponadto

$$x^3-3x-4\sqrt{7}=\left(x-\sqrt{7}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{7}x+4\right)\,,$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{7}$.

590. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka sześciennego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$10\pm6\sqrt{3}=\left(1\pm\sqrt{3}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\frac{10-6\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{10+6\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{2}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(5-3\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-2}\cdot\left(\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}\right)+\left(5+3\sqrt{3}\right)=10-3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3+3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x-10=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=\sqrt[3]{4}$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[3]{4}$.