Zabawy z pierwiastkami

561. Zapisz wyrażenie
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}$$
w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Korzystając trzykrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci
$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b \qquad a+b\neq 0$$
otrzymujemy
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=2-1=1\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

562. Zapisz wyrażenie
$$\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}$$
w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Korzystając trzykrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci
$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b \qquad a+b\neq 0$$
otrzymujemy
$$\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{1+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{5}{\sqrt{11}+4}\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\left(\sqrt{6}-1\right)+\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)+\left(4-\sqrt{11}\right)\right)=\frac{1}{5}\cdot(4-1)=\frac{3}{5}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 3/5.

563. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że
$$3\pm2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^2, \qquad \sqrt{2}\pm1>0\,.$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(3+2\sqrt{2}\right)=8\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{8}$.

564. Jaka cyfra występuje bezpośrednio po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2019}\ ?$$

Zapiszmy daną w zadaniu liczbę w postaci

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2019}=a+b\sqrt{2}\,,$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2019}=a-b\sqrt{2}\,,$$

skąd

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2019}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2019}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2019}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}=2a\,.$$

Ponieważ $2a$ jest liczbą całkowitą, a liczba $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ jest dodatnia, przy czym

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}=\frac{1}{2^{2019}}<\frac{1}{2^4}<\frac{1}{10}\,,$$

wnioskujemy stąd, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2019}$ po przecinku występuje cyfra 0 (a nawet wiele zer, jeśli oszacować $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ przez odwrotność wyższej potęgi dziesiątki).

565. Rozstrzygnij, czy liczba

$$41+29\sqrt{2}$$

jest sumą kwadratów 2019 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

Wykażemy, że liczba $41+29\sqrt{2}$ nie jest sumą kwadratów 2019 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że

$$41+29\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{2019}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^2\,,$$

gdzie wszystkie liczby a_i oraz b_i są wymierne.

Wówczas także

$$41-29\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{2019}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^2\,,$$

co jednak nie może zachodzić, gdyż prawa strona jest nieujemna jako suma kwadratów liczb rzeczywistych, a lewa jest ujemna, o czym można się przekonać następująco:

$$41-29\sqrt{2}=\sqrt{1681}-\sqrt{1682}<0\,.$$

566. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$7\pm5\sqrt{2}=\left(1\pm\sqrt{2}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu zgodnie ze wzorem $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=$$

$$=\left(7-5\sqrt{2}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)+\left(7+5\sqrt{2}\right)=14-3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3+3x-14=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=2$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 2.

567. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Sposób I: Zauważmy, że

$$26\pm15\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(26-15\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)+\left(26+15\sqrt{3}\right)=52+3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-52=0\,.$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=4$, a ponadto

$$x^3-3x-52=(x-4)\cdot\left(x^2+4x+13\right)=(x-4)\cdot\left((x+2)^2+9\right),$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 4.

568. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m i n spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^m=\left(1+2\sqrt{2}\right)^n.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^m=\left(1+2\sqrt{2}\right)^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m i n.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z danego równania otrzymujemy

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^m=\left(1-2\sqrt{2}\right)^n,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{2}\right|<1$$

oraz

$$\left|1-2\sqrt{2}\right|>1$$

lewa strona jest bezwzględnie mniejsza od 1, a prawa bezwzględnie większa od 1.

569. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^m=\left(1+2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{3}\right)^k.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^m=\left(1+2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{3}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z danego równania otrzymujemy

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^m=\left(1-2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1-3\sqrt{3}\right)^k,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{3}\right|<1\,, \qquad \left|1-2\sqrt{3}\right|>1 \qquad \text{oraz} \qquad \left|1-3\sqrt{3}\right|>1$$

lewa strona jest bezwzględnie mniejsza od 1, a prawa bezwzględnie większa od 1.

570. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(3+\sqrt{5}\right)^k.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(3+\sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z danego równania wynika

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^m=\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{5}\right|>1\,,$$

$$\left|2-\sqrt{5}\right|<1$$

oraz

$$\left|3-\sqrt{5}\right|<1$$

prawdziwe są następujące nierówności:

$$\left|1-\sqrt{5}\right|^m \geqslant \left|1-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-1>1=\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|\geqslant$$

$$\geqslant \left|2-\sqrt{5}\right|^n+\left|3-\sqrt{5}\right|^k \geqslant \left|\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k\right|,$$

czyli

$$\left|1-\sqrt{5}\right|^m > \left|\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k\right|.$$

571. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(1+2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{5}\right)^k.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(1+2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{5}\right)^k \tag{1}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z równania (1) otrzymujemy

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^m=\left(1-2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1-3\sqrt{5}\right)^k,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (1) prowadzi do równania

$$(-4)^m=(-19)^n\cdot(-44)^k,$$

które nie ma rozwiązań, gdyż dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i k jego prawa strona jest podzielna przez 19, a lewa nie.

572. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^k.$$

Wykażemy, że równanie

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^k \tag{2}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Z równania (2) wynika

$$\left(5-\sqrt{7}\right)^m=\left(4-\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1-\sqrt{7}\right)^k,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (2) prowadzi do równania

$$18^m=9^n\cdot(-6)^k,$$

skąd

$$18^m=9^n\cdot 6^k. \tag{3}$$

W celu rozwiązania równania (3) porównujemy rozkłady obu jego stron na czynniki pierwsze:

$$2^m\cdot 3^{2m}=3^{2n}\cdot 2^k\cdot 3^k,$$

co sprowadza się do układu równań

$$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & k \\ 2m & = & 2n+k \end{array}\right. \tag{4}$$

Układ (4) ma rozwiązania $m=k=2n$, co po wstawieniu do równania (2) i wyciągnięciu pierwiastka n-tego stopnia daje

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^2=\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^2. \tag{5}$$

Jednak równość (5) nie jest prawdziwa, gdyż

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^2<\left(5+\sqrt{9}\right)^2=8^2=64$$

oraz

$$\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^2=\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(8+2\sqrt{7}\right)>\left(4+\sqrt{4}\right)\cdot\left(8+\sqrt{25}\right)=6\cdot 13=78>64.$$

573. Wiadomo, że 36 kulek można ułożyć na stole w kwadrat lub w trójkąt równoboczny, mamy bowiem

$$36=6^2=1+2+3+4+5+6+7+8\,.$$

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich par liczb naturalnych m, n, że

$$m^2=1+2+3+\ldots+n\,.$$

Podaj kilka przykładów takich liczb m i n (oprócz $m=n=1$ i powyższego $m=6$, $n=8$).

Dane w zadaniu równanie sprowadza się do

$$m^2=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\,,$$

czyli

$$2m^2=n\cdot(n+1)\,.$$

Iloczyn dwóch kolejnych liczb jest podwojonym kwadratem, gdy jedna z tych liczb jest kwadratem, a druga podwojonym kwadratem.

Niech dla liczby naturalnej k liczby a_k i b_k będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^k=a_k+b_k\sqrt{2}\,.$$

wówczas

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^k=a_k-b_k\sqrt{2}\,.$$

Przemnożenie stronami tych równości prowadzi kolejno do

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^k\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^k=\left(a_k+b_k\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_k-b_k\sqrt{2}\right)\,,$$

$$\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^k=a_k^2-2b_k^2\,,$$

$$(-1)^k=a_k^2-2b_k^2\,.$$

Wobec tego można przyjąć

$$m=a_kb_k \qquad \text{oraz} \qquad n=\min\left(a_k^2,\,2b_k^2\right)\,,$$

co daje nieskończenie wiele par liczb m, n spełniających warunki zadania (bo liczby $\left(1+\sqrt{2}\right)^k$ są różne).

Najmniejsze uzyskane tą metodą przykłady, poza dwoma podanymi w treści zadania (odpowiadającymi $k=1$ i $k=2$), otrzymujemy na podstawie następujących obliczeń:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2},\ \ a_3=5,\ b_3=7,\ \ m=35,\ n=49\,,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^4=17+12\sqrt{2},\ \ a_4=17,\ b_4=12,\ \ m=204,\ n=288\,,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5=41+29\sqrt{2},\ \ a_5=41,\ b_5=29,\ \ m=1189,\ n=1681\,,$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^6=99+70\sqrt{2},\ \ a_6=99,\ b_6=70,\ \ m=6930,\ n=9800\,.$$