# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

## Zawody drużynowe

Zwardoń, 19 czerwca 2007 r.

**1.** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie $E$. Punkty $K$, $L$, $M$, $N$ są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty $ABE$, $BCE$, $CDE$, $DAE$. Wykazać, że jeśli w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, to na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

**2.** Liczby dodatnie $x$, $y$, $z$ spełniają warunek

$$x+y+z+xyz=4.$$

Dowieść, że zachodzi nierówność

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z).$$

**3.** W $n$-osobowym stowarzyszeniu (gdzie $n>20$) działają komisje. W skład każdej komisji wchodzi 20 osób. Ponadto dla każdej pary członków stowarzyszenia istnieje dokładnie jedna komisja, do której należą obaj członkowie. Wyznaczyć najmniejszą wartość $n$, dla której taka sytuacja jest możliwa.

**4.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie $d$, dla których istnieje taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że liczba $d$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb

$$a_n = W(n) + 3^n \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz