Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 11 czerwca 2007 r. (dzień pierwszy)

1. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć najmniejszą wartość, jaką może przyjąć suma cyfr dodatniej wielokrotności liczby $10^k - 1$.

2. Dany jest $(2n)$-kąt wypukły $A_1A_2\dots A_{2n}$ wpisany w okrąg o. Punkt P, różny od punktów A_1, A_2, …, A_{2n}, leży na okręgu o. Niech p_1, p_2, …, p_{2n-1}, p_{2n} oznaczają odległości punktu P odpowiednio od prostych A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{2n-1}A_{2n}$, $A_{2n}A_1$. Dowieść, że

$$p_1p_3\dots p_{2n-1} = p_2p_4\dots p_{2n}.$$

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n > 1$, dla których liczby

$$\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n-1}$$

mają wspólny dzielnik całkowity większy od 1.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz