Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 12 czerwca 2007 r. (dzień drugi)

5. Niektóre pola tablicy $n\times n$ pomalowano na zielono. Każde pole, które nie jest zielone, ma wspólny bok z zielonym polem. Ponadto dowolne dwa zielone pola można połączyć takim ciągiem zielonych pól, że każde dwa sąsiednie pola w tym ciągu mają wspólny bok.

Dowieść, że liczba zielonych pól jest nie mniejsza od $\frac{n^2-2}{3}$.

6. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest nierówność

$$n\sqrt{7}\{n\sqrt{7}\} > \frac{3}{2}$$

(gdzie symbol $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej x).

7. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$ o polu s. Pola trójkątów EAB, ABC, BCD, CDE, DEA są odpowiednio równe a, b, c, d, e. Wykazać, że

$$s^2 - s(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0.$$

8. Dowieść, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest różnicą dwóch wielomianów rosnących.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz