Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 13 czerwca 2007 r. (dzień trzeci)

9. Wyznaczyć największą liczbę dodatnią k o następującej własności: Jeżeli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność

$$kabc > a^3 + b^3 + c^3,$$

to są one długościami boków trójkąta.

10. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkt P jest takim punktem leżącym wewnątrz tego czworokąta, że pola trójkątów BCP i DAP są równe. Udowodnić, że środki odcinków AB, CD i EP leżą na jednej prostej.

11. Rozstrzygnąć, czy dla dowolnych liczb całkowitych $a > b > 0$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich n, że liczba $a^n + b^n$ jest podzielna przez n.

12. Wyznaczyć najmniejszą liczbę pól, jakie należy pomalować na czerwono w tablicy o wymiarach 2007×2007, tak aby w każdym kwadracie 4×4 złożonym z pól tablicy co najmniej połowa pól była czerwona.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz