Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 14 czerwca 2007 r. (dzień czwarty)

13. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc=1$. Wykazać, że

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\leqslant a^3b+b^3c+c^3a.$$

14. Niech $p(n)$ oznacza największy dzielnik pierwszy liczby całkowitej $n>1$. Dowieść, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n>1$ zachodzą nierówności

$$p(n)<p(n+1)<p(n+2).$$

15. Dane są liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n. Udowodnić, że można każdą z tych liczb pomalować na czerwono albo na zielono w taki sposób, że każda trójka (x_i,x_{i+1},x_{i+2}) dla $i=1,2,\ldots,n-2$ zawiera liczby obu kolorów oraz suma S liczb czerwonych spełnia nierówność

$$|S|\geqslant\frac{1}{6}(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|).$$

16. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór kół na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każde z danych kół jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz