Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

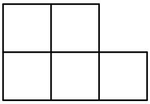
Zwardoń, 15 czerwca 2007 r. (dzień piąty)

17. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x^2+5=y^3$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

18. Rozpatrujemy następujące figury złożone z pięciu kwadratów jednostkowych: takie jak na poniższym rysunku



oraz figury otrzymane z powyższej przez obroty (ale nie przez odbicia symetryczne).

Rozstrzygnąć, czy można wypełnić takimi figurami kwadrat rozmiaru 44×44 z usuniętym jednostkowym kwadratem narożnym.

19. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Punkt P leży wewnątrz tego trapezu, przy czym

$$\measuredangle APD=\measuredangle BPC=90^\circ.$$

Wykazać, że punkty P i E leżą na prostej prostopadłej do podstaw danego trapezu.

20. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej $n\geqslant 1$ wielomian

$$W(x)=(x^2+1^2)(x^2+2^2)(x^2+3^2)\ldots(x^2+n^2)+1$$

nie jest iloczynem wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz