Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 18 czerwca 2007 r. (dzień szósty)

21. Dany jest taki sześciokąt wypukły $ABCDEF$, że pola trójkątów ACE i BDF są równe. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków danego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

22. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a_1, a_2, $\ldots$, a_n spełniona jest nierówność

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_2a_3+a_3^2}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_na_1+a_1^2}\geqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{3}.$$

23. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba

$$n^4+n^3+n^2+n+1$$

ma co najmniej 2007 różnych dzielników pierwszych.

24. Dana jest nieskończona rodzina zbiorów 3-elementowych. Udowodnić, że jeżeli każde dwa z tych zbiorów mają niepustą część wspólną, to istnieje taki zbiór 2-elementowy, który ma niepustą część wspólną z każdym zbiorem z tej rodziny.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz