Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 20 czerwca 2007 r. (dzień siódmy)

25. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek
$$ab+bc+ca \leqslant 3abc.$$
Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a+b+c.$$

26. Dana jest tablica rozmiaru $2n \times 2n$, w której $3n$ pól pomalowano na czarno. Wykazać, że można tak wybrać n kolumn oraz n wierszy, by każde czarne pole znalazło się w pewnym wybranym wierszu lub w pewnej wybranej kolumnie.

27. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Punkty P i Q są odpowiednio środkami tych łuków BC i CA okręgu o, które nie zawierają odpowiednio punktów A i B. Okrąg s jest styczny wewnętrznie do okręgu o oraz jest styczny do odcinków BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Punkt R jest takim punktem, że czworokąt $PCQR$ jest równoległobokiem. Wykazać, że punkty D, E, R leżą na jednej prostej.

28. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: jeżeli dodatnie, względnie pierwsze liczby a i b dzielą n, to również liczba $a+b-1$ dzieli n.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz