Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 21 czerwca 2007 r. (dzień ósmy)

29. W trójkącie ABC kąt $\sphericalangle ABC$ jest rozwarty. Punkt F leży na boku AC, przy czym

$$AF = BF \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle FBC = 90^\circ.$$

Punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Prosta przechodząca przez punkt F i równoległa do boku AB przecina prostą DE w punkcie G. Dowieść, że $\sphericalangle GCB = \sphericalangle ACD$.

30. Wyrazy ciągu a_1, a_2, $\ldots$ są liczbami całkowitymi dodatnimi i każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz. Ponadto

$$a_{n+1} \in \{a_n - 1, 4a_n - 1\} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyrazu a_{2007}.

31. Dane są liczby całkowite a_1, b_1, c_1, d_1. Niech dla $i = 1, 2, 3 \ldots$ $a_{i+1} = |a_i - b_i|$, $b_{i+1} = |b_i - c_i|$, $c_{i+1} = |c_i - d_i|$, $d_{i+1} = |d_i - a_i|$. Wykazać, że istnieje taka liczba k, że $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$.

32. Dana jest liczba całkowita nieujemna n oraz takie niezerowe liczby całkowite a, b, c, że $a + b + c = 0$. Wykazać, że

$$a^2 + b^2 + c^2 \mid a^{n^2+1} + b^{n^2+1} + c^{n^2+1}.$$

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz