Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Zawody indywidualne

Zwardoń, 22 czerwca 2007 r. (dzień dziewiąty)

33. Dany jest skończony podzbiór A zbioru liczb pierwszych oraz liczba całkowita dodatnia a. Wykazać, że istnieje tylko skończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich m, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby $a^m - 1$ należą do A.

34. Rozważamy wszystkie takie pary liczb rzeczywistych (a,b), że wielomian

$$P(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$$

ma pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a^2 + b^2$.

35. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu i nie jest jego średnicą. Cięciwa AC tego okręgu przechodzi przez środek odcinka OB. Proste OC i AB przecinają się w punkcie P, zaś proste OA i BC przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $PC = AQ$.

36. W pewnym państwie jest n miast. Między każdymi dwoma z nich istnieje dokładnie jedno z następujących połączeń: kolejowe, autobusowe lub lotnicze. Wykazać, że istnieje taki środek komunikacji oraz co najmniej $\frac{n}{2}$ takich miast, by za pomocą tego środka można było odbyć podróż (niekoniecznie bezpośrednią) między dowolnymi dwoma z nich.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz