Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Pierwszy Mecz Matematyczny

Zwardoń, 15–16 czerwca 2007 r.

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę pierwszą p, że liczba
$$2^{120!}-1$$
jest podzielna przez p i nie jest podzielna przez p^2.

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n\geqslant 1$, że liczba
$$n!+8$$
jest podzielna przez $2n+1$.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc}\leqslant 2(a+b+c).$$

4. Dane są: liczba całkowita $n\geqslant 2$ i liczba rzeczywista a. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n układ równań
$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

5. Dane są różne liczby rzeczywiste x_1, x_2, ..., x_n ($n\geqslant 2$). Określamy wielomian W wzorem
$$W(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$
Niech $W_i(x)$ będzie ilorazem z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x-x_i$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Dowieść, że
$$\frac{x_1^n}{W_1(x_1)}+\frac{x_2^n}{W_2(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^n}{W_n(x_n)}=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

6. Dana jest prostokątna tabela $m\times n$ (gdzie $m,n\geqslant 3$). W każdej kratce brzegowej (tzn. mającej wspólny bok z brzegiem tabeli) napisana jest liczba rzeczywista. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden taki sposób wpisania liczb rzeczywistych do pozostałych kratek, że liczba w dowolnej niebrzegowej kratce jest średnią arytmetyczną liczb znajdujących się w czterech sąsiednich kratkach.

7. Różne liczby całkowite dodatnie c_1, c_2, ..., c_n spełniają warunek

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_n}\geqslant 2.$$

Dowieść, że istnieją dwa różne niepuste zbiory A, $B\subseteq\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, dla których $\sum\limits_{x\in A} x=\sum\limits_{y\in B} y$.

8. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku R. Punkty A i B leżą na różnych ramionach, zaś punkt C leży wewnątrz tego kąta. Posługując się jedynie linijką skonstruować takie punkty P i Q leżące odpowiednio na ramionach RB i RA danego kąta, że punkt C leży na odcinku PQ oraz odcinki AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

9. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, zaś punkt H jest punktem przecięcia wysokości. Prosta AH przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinają się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem środka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie R. Dowieść, że $BP=CR$.

10. Różne punkty M, S, T leżą na okręgu o środku w punkcie O. Styczne do tego okręgu w punktach S i T przecinają się w punkcie A. Punkt P jest punktem przecięcia prostej AM i prostej prostopadłej do prostej MO przechodzącej przez punkt S. Dowieść, że punkt symetryczny do punktu S względem punktu P leży na prostej MT.

11. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności

$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{[ABD]}{[ABC]}=\lambda.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości λ.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz