Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej

Drugi Mecz Matematyczny

Zwardoń, 22–23 czerwca 2007 r.

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2.$$

Udowodnić, że liczba $a+b+c+d$ jest złożona.

2. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$ niepodzielne przez 7, 11 ani 13. Dowieść, że można tak dobrać znaki w wyrażeniu

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_{1000}\,,$$

aby w wyniku otrzymać liczbę podzielną przez 1001.

3. Liczby dodatnie x_1, x_2, …, x_n spełniają warunek

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1.$$

4. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $p=4n+1$ jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że

$$\left[\sqrt{p}\,\right]+\left[\sqrt{2p}\,\right]+\ldots+\left[\sqrt{np}\,\right]=\frac{p^2-1}{12},$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x.

5. Dane są liczby rzeczywiste $a<b$, $0<p<q<1$. Dowieść, że istnieje taki wielomian W o współczynnikach całkowitych, że

$$W(x)\in\langle a;b\rangle \qquad \text{dla każdego } x\in\langle p;q\rangle.$$

6. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieją takie liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, b$ oraz takie liczby całkowite $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n+1}$ nie mniejsze od $2n$, że

$$NWD(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, b)=1$$

oraz

$$a_1^{k_1}+a_2^{k_2}+a_3^{k_3}+\ldots+a_{n+1}^{k_{n+1}}=b^{2n}\,.$$

7. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $abc=1$. Wykazać, że

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}\geqslant\sqrt{2}.$$

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje na płaszczyźnie zbiór 2007 punktów białych leżących na okręgu oraz 2007 punktów czarnych takich, że każda prosta przechodząca przez dwa punkty białe przechodzi również przez pewien punkt czarny.

9. Okrąg o środku S jest dopisany do czworokąta wypukłego $ABCD$ i prosta AC przecina ten okrąg. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i prostopadła do prostej AC przecina proste BS i DS odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że $EP=EQ$.

10. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Punkty P i Q są odpowiednio punktami przecięcia wysokości trójkątów ADE i BCE. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB i CD. Wykazać, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do prostej MN.

11. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle BAC=\sphericalangle BCD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle ADC=\sphericalangle ABD.$$

Dowieść, że $AB=CD$.

Zatwierdził kierownik naukowy obozu K. Dorobisz