

Konsultacje: czwartki 12-13, pokój $2^9 = (5+1+2)^3$

Kolokwium nr 1: 20.10.2005, zad. 1-50

Kolokwium nr 2: 27.10.2005, zad. 1-51

Kolokwium nr 3: 3.11.2005, zad. 26-84

Kolokwium nr 4: 10.11.2005, zad. 1-97

Kolokwium nr 5: 17.11.2005, zad. 98-130

0. Funkcje trzech (i więcej) zmiennych.

Opisać obszar będący dziedziną funkcji trzech zmiennych

1. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ 2. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$

3. $f(x, y, z) = z + \ln(x^2 + y^2 - 9)$

4. $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}$

Zbadać istnienie następujących granic, obliczyć wartość, jeśli granica istnieje

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{yz}{x}$ 6. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{yz}{x^2}$ 7. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \\ y^2 + z^2 \leq x}} \frac{yz}{x}$ 8. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \\ y^2 + z^2 \leq x}} \frac{yz}{x^2}$

9. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \\ y^2 + z^2 \leq x}} \frac{yz}{x^3}$ 10. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 11. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$

12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{xyzt}{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}$ 13. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^8}$ 14. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz^2}{x^2 + y^4 + z^8}$

Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1 następujących funkcji

15. $f(x, y, z) = x^7 y^9 + z e^{xy}$ 16. $f(x, y, z) = x^{y^z}$

17. $f(x, y, z, t, u, v, w) = xy^2 z^3 t^4 + e^{tu^2 v^3 w^4}$

18. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(0, 0, 0) = 0$

19. Obliczyć pochodną funkcji $f(x,y,z,t) = xy + z^2t^7$ w punkcie $(1,2,3,4)$ w kierunku wektora $(1,1,1,1)$

Obliczyć pochodną w kierunku podanego wektora

20. $f(x,y,z) = \sin x + y^2z$, $(1,1,4)$

21. $f(x,y,z,t) = 2xy + x^2y^2z^2t^2$, $(1,-1,1,-1)$

22. $f(x,y,z,t,u,v) = x + xy + xyz + yzt + ztu + tuv + uv + v$,
 $(2,1,-1,-1,-1,1)$

Obliczyć gradient funkcji

23. $f(x,y,z) = x^2 + 3\sin y$ **24.** $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

25. $f(x,y,z,t) = x + 2y + 3z + 4t + 5$

1. Hesjan, punkty ekstremalne funkcji wielu zmiennych.

Obliczyć hesjan funkcji w podanych punktach i zbadać czy jest dodatnio lub ujemnie określony

26. $f(x,y) = x^2 + 7xy + y^2$ w (π, e) **27.** $f(x,y) = e^{xy}$ w $(1,1)$

28. $f(x,y,z) = x^3 + y^2z$ w $(4,2,1)$

Znaleźć punkty krytyczne następujących funkcji i zbadać, które z nich są punktami ekstremalnymi. Nie musisz zajmować się badaniem przypadków, w których hesjan nie daje rozstrzygnięcia.

29. $f(x,y) = e^{xy} - x$ **30.** $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

31. $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

32. $f(x,y,z) = xyz - x - y - z$ **33.** $f(x,y) = x + \sin(x+y)$

34. $f(x,y) = x + y - 4x^2y^2$ **35.** $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$

36. $f(x,y) = x^3 + \sqrt[3]{y} + xy$ **37.** $f(x,y) = \sin x + \sin y + 2x - 2y$

38. $f(x,y) = (x+y)^3 - x^2 - 3y^2$ **39.** $f(x,y) = \ln(x^2+1) + xy + y^2$

40. $f(x,y) = x^2 + \sqrt{2\pi y} \sin x + y^2$ **41.** $f(x,y) = x^{10} + xy + y^7$

42. $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3y^2x + y^3$

43. $f(x, y) = \operatorname{arctg} x - xy + y^2$
44. $f(x, y, z) = xy + x^2 + z^2 + z^4$
45. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz$
46. $f(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2 + xy + yz + zt + y + z$
47. $f(x, y) = xy(x + 2y + 3)$.
48. $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - 3zt + x + y$.
49. $f(x, y) = \sin x + \frac{x}{2} + \cos y$.
50. $f(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3t^2 + 2xy + yt + z^2 + 5z$.

51. Rozwiązać Mały atlas poziomic.

2. Ekstrema warunkowe.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na zbiorze zdefiniowanym podanymi warunkami

OBSZAR W $\mathbb{R}^2$

52. $f(x, y) = x^2 - 4y^2 + xy$, $x, y \in [-1, 1]$
53. $f(x, y) = x^2 + x + y$, $x, y \in [-1, 1]$
54. $f(x, y) = x^2 + xy + y$, $x, y \in [-2, 3]$
55. $f(x, y) = |2x - y| - y^2$, $x, y \in [0, 1]$, $x + y \leq 1$

KRZYWA W $\mathbb{R}^2$

56. $f(x, y) = 3x + 4y + 5$, $x^2 + y^2 = 1$
57. $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 1$
58. $f(x, y) = x + y$, $9x^2 + 4y^2 = 36$

POWIERZCHNIA W $\mathbb{R}^3$

59. $f(x, y, z) = x - y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
60. $f(x, y, z) = 2x - y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
61. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
62. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

KRZYWA W $\mathbb{R}^3$

63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x + y + z = 1$

64. $f(x, y, z) = yz$, $x^2 + y^2 = 1$ i $x = z$

65. $f(x, y, z) = z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i $x + y = 0$

RÓŻNE

66. $f(x, y) = |2x + y| + xy$, $x, y \in [-10, 10]$

67. $f(x, y) = 2x + 2y + |x|$, $x^2 + y^2 \leq 1$

68. $f(x, y, z) = 4|y| + x + y + z$, $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$

69. $f(x, y) = x^6 + y^6 + xy$, $x, y \in [-1, 1]$

70. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4\arctg(xy)$, $x, y \in [0, 10]$

71. $f(x, y) = x^4 + y^4$, $x, y \in [0, 10]$, $x + 8y \geq 9$

72. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $x, y, z \in [-1, 1]$

73. $f(x, y) = |x| + (x + y)^2 + \frac{3}{2}y$, $x, y \in [-1, 1]$

74. $f(x, y) = \frac{1}{2+xy} + \frac{x}{8}$, $x, y \in [-1, 1]$

75. $f(x, y) = 9(x - 1)^2 + 16(y - 2)^2$, $x \in [0, 2]$, $0 \leq y \leq x^2$

76. $f(x, y) = y$, $x^4 + 4xy + y^4 = 2$

77. $f(x, y, z) = (x^2 - 1)^2 + y^2 + z^4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

78. $f(x, y) = 2x + y$, $x^2 + y^2 = 3$

79. $f(x, y) = xy^4$, $x^2 + 4y^2 = 5$

80. $f(x, y) = x^2y - x^2x$, $x^2 + xy + y^2 \leq 9$

81. $f(x, y) = y$, $x^2 + xy + y^2 \leq 31$

82. $f(x, y, z) = xyz$, $x, y, z \in [0, +\infty)$, $x + 2y + 3z \leq 9$

83. Wiadomo, że $xyz = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ i x, y, z są dodatnie. Jaka najmniejszą i największą wartość może osiągać $x + y + z$? Podać wartość dokładną oraz przybliżenie z 5 cyframi po przecinku.

Wskazówka: $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$ dzieli się przez $x - y$.

84. Jaka jest najmniejsza i największa wartość sumy

$$x + 2y + 3z + 4t + 5$$

przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$?

3. Rachunek różniczkowy wielu zmiennych - powtórzenie

85. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{x^3 y z^n}{x^{10} + y^{12} + z^{60}}$$

w zależności od liczby całkowitej dodatniej n .

86. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^{24}}{x^{10} + y^{2n}}$$

w zależności od liczby całkowitej dodatniej n .

87. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z, t) = x + 2y + 3z + 4t$$

na zbiorze zdefiniowanym warunkiem

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

88. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z, t) = x + 2y + 3z + 4t$$

na zbiorze zdefiniowanym warunkami

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad x + y = 0$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

89. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z, t) = x + 2y + 3z + 4t$$

na zbiorze zdefiniowanym warunkami

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad x + y = 0, \quad z + t = 0$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

90. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$$

na zbiorze zdefiniowanym warunkami

$$x^2 + y^2 + z^2 = z, \quad 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

91. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. W zależności od a wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z, t) = x + ay + az + t$$

na zbiorze zdefiniowanym warunkami

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad x + y + z = 0, \quad y + z + t = 0$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

92. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. W zależności od a wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = ax^2 + yz$$

na okręgu zdefiniowanym warunkami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

93. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. W zależności od a wyznaczyć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + axy + ayz.$$

94. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^8}{x^6 + y^{2n}}$$

w zależności od liczby całkowitej dodatniej n .

95. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a . W zależności od a znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 10x^2 + y^2$$

na okręgu zdefiniowanym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = ax$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

96. Zbadać istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^8 y^8}{x^{12} + y^{2n}}$$

w zależności od liczby całkowitej dodatniej n .

97. Dana jest liczba rzeczywista dodatnia a . W zależności od a znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x, y, z) = 5x^2 + y^2$$

na okręgu zdefiniowanym równaniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = ax$$

i określić, w których punktach te wartości są osiągane.

4. Całki krzywoliniowe.

Obliczyć całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju (nieskierowane)

98. $\int_A |x| + y ds, A = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$

99. $\int_B x^2 y ds, B = \{(x, y) \in A; y \geq 0\}$

100. $\int_C x^2 ds, C = \{(x, y); x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\}$

$$101. \int_D x ds, D = \{(x, y) \in A; x \geq \frac{1}{2}\} \quad 102. \int_D |y| ds \quad 103. \int_D \frac{1}{x^2} ds$$

$$104. \int_E \frac{y}{\sqrt{4x^2+1}} ds, E = \{(x, x^2); -1 \leq x \leq 2\} \quad 105. \int_E x^3 ds$$

$$106. \int_F x(\arctg y)^7 ds, F = \{(x, x^2); -1 \leq x \leq 1\}$$

$$107. \int_G xyz ds, G - \text{odcinek łączący punkty } (1, 2, 3) \text{ i } (6, 5, 4)$$

Wyznaczyć środki ciężkości krzywych (całki wymagające żmudnych rachunków wziąć z tablic)

$$108. E \quad 109. F \quad 110. H = B \cup \{(x, 0); -1 \leq x \leq 1\}$$

$$111. I - \text{obwód trójkąta o wierzchołkach } (0, 0), (1, 2) \text{ i } (3, 0)$$

$$112. J - \text{obwód trapezu o wierzchołkach } (0, 0), (1, 1), (2, 1) \text{ i } (3, 0)$$

Wyznaczyć średnią odległość punktu od krzywej

$$113. (0, 0), H \quad 114. (0, \frac{1}{4}), F \quad 115. (0, 0, 0), G$$

Obliczyć całki krzywoliniowe drugiego rodzaju (skierowane)

$$116. \int_T \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, T - \text{odcinek od } (0, -1) \text{ do } (2, 2)$$

$$117. \int_U \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, U - \text{łamana o wierzchołkach } (0, -1), (2, -1), (2, 2)$$

$$118. \int_V \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, V - \text{łamana o wierzchołkach } (0, -1), (1, 0), (2, 2)$$

$$119. \int_W \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, W - \text{łamana o wierzchołkach } (0, -1), (1, 2), (2, 2)$$

$$120. \int_X \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}, X - \text{łamana o wierzchołkach } (0, -1), (-1, 2), (2, 2)$$

$$121. \int_T ydx+xdy \quad 122. \int_U ydx+xdy \quad 123. \int_V ydx+xdy$$

$$124. \int_W ydx+xdy \quad 125. \int_X ydx+xdy$$

$$126. \int_T y^2 dx + x^2 dy \quad 127. \int_U y^2 dx + x^2 dy$$

$$128. \int_V y^2 dx + x^2 dy \quad 129. \int_W y^2 dx + x^2 dy \quad 130. \int_X y^2 dx + x^2 dy$$