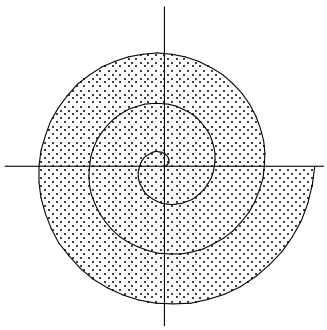
Jarosław Wróblewski

Ćwiczenia 22.01.2008

15. Powtórzenie, uzupełnienie (c.d.)

304. Spirala Archimedesa ma równanie parametryczne $(t\cos t, t\sin t)$. Obliczyć pole figury naszkicowanej na rysunku obok. Narysowany fragment spirali Archimedesa odpowiada $t \in [0, 6\pi]$.



Rozwiązać zadanie dwoma metodami: wykorzystując podaną parametryzację oraz przechodząc do współrzędnych biegunowych.

Uwaga: Podana figura jest zawarta w kole o promieniu 6π i zawiera koło o promieniu 4π. Upewnić się, że obliczone pole figury zawiera się pomiędzy polami tych kół.

305. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości powłoki półkulistej

$$\{(x,y,z):\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0\}\,.$$

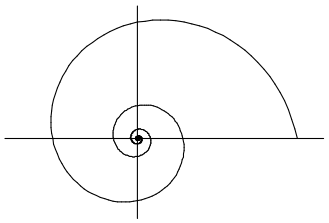
306. Obliczyć pole powierzchni fragmentu paraboloidy hiperbolicznej

$$\{(x,y,z):\ z = x^2 - y^2,\ x^2+y^2 \leqslant 2\}\,.$$

307. a) Spirala ma równanie parametryczne

$$(e^{-at}\cos t,\, e^{-at}\sin t), \quad a>0\,,$$

gdzie $t \in [0,\infty)$. Obliczyć długość spirali.



b) Prosta styczna do spirali w punkcie $A=(1,0)$ przecina oś OY w punkcie B. Obliczyć długość odcinka AB.

c) Cztery psy znajdują się w rogach kwadratowego podwórka. W pewnym momencie każdy z psów zaczyna biec w kierunku psa znajdującego się w sąsiednim (następnym przeciwzegarowo) rogu, odpowiednio zmieniając kierunek w czasie biegu. Prędkości psów są jednakowe. Jaką drogę przebiegnie każdy z psów przed zderzeniem w środku podwórka?

308. Obliczyć całkę

$$\iint\limits_T \frac{x}{x^2+7y^2}\,dy\,dz + \frac{y}{x^2+7y^2}\,dz\,dx\,,$$

gdzie

$$T=\{(R\cos\alpha+r\cos\alpha\cos\beta, R\sin\alpha+r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)\colon \alpha,\beta\in[0,2\pi]\}$$

jest torusem o promieniach $r<R$, zorientowanym na zewnątrz.

309. Obliczyć całkę

$$\iint\limits_\Omega x^2+y^2\,d\omega(x,y)\,,$$

gdzie

$$\Omega=\{(x,y)\colon\ |x|\leqslant 3,\ |y|\leqslant 2,\ x^2+y^2\geqslant 1\}\,.$$

310. Rozstrzygnąć istnienie granicy

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ t\to 0}} \frac{xyzt}{x^2+y^4+z^6+t^8}\,.$$

311. Funkcja ciągła f określona w otoczeniu punktu -1 spełnia warunki

$$\bigwedge_{x\in D_f} x^4+xf(x)+f^4(x)=1$$

oraz $f(-1)=1$.

Obliczyć $f''(-1)$. Przyjąć dwukrotną różniczkowalność f bez dowodu.

312. Zastosować twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego do pola wektorowego

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right)$$

i bryły

$$\Omega=\{(x,y,z)\colon\ 4\geqslant z\geqslant x^2+y^2\geqslant 1\}\,,$$

a następnie obliczyć obie strony otrzymanej równości i porównać wyniki.

313. Obliczyć całkę

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \int_{1-\sqrt{1+2x-x^2}}^{1+\sqrt{1+2x-x^2}} \frac{(x+y)^4}{\left(x^2+y^2\right)^5}\, dy\, dx\,.$$

314. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y,z) = x+2y+3z$$

na zbiorze

$$S = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x+4y+8z = 9\right\}$$

oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

315. Dla których wartości parametru naturalnego n zbiór

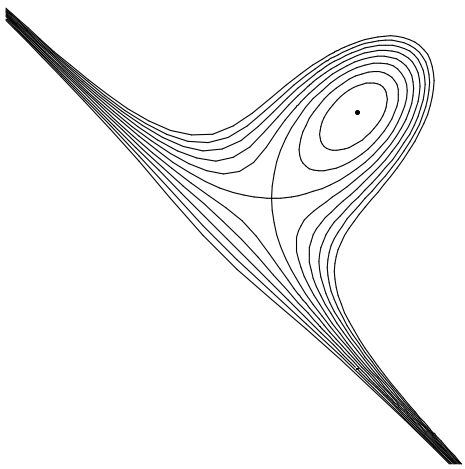
$$\left\{(x,y,z) : x^n+y^n+z^n = n\right\}$$

jest zwarty?

316. Podać przykład takich niepustych zwartych podzbiorów A, B przestrzeni, mających niepusty przekrój, że zbiór $A \setminus B$ jest zbiorem niepustym zwartym.

317. a) Znaleźć i sklasyfikować punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = x^3+y^3-axy$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a.

b) Wyznaczyć wartość parametru a, dla której sporządzono rysunek obok. Kierunek osi jest standardowy. Narysowane są wszystkie poziomice odpowiadające wartościom całkowitym z przedziału $[-5,5]$.